

UNIVERSITEIT GENT
Faculteit van de Toegepaste Wetenschappen
Vakgroep Werktuigkunde en Warmtetechniek

Een numeriek model voor de vulling van de linkerhartkamer

door **ir. J. Vierendeels**

Promotor **Prof. ir. E. Dick**

Proefschrift voorgelegd tot het bekomen van de
graad van doctor in de toegepaste wetenschappen

Juni 1998

Dankwoord

Bij het begin van dit proefschrift wil ik een woord van dank richten aan allen die hebben bijgedragen tot het tot stand komen van dit werk.

In de eerste plaats wil ik mijn promotor, Prof. E. Dick, danken voor zijn raad en begeleiding zonder dewelke dit proefschrift niet tot stand had kunnen komen.

In het bijzonder wil ik dr. ir. K. Riemslag bedanken, met wie ik samen het C++ programma heb ontwikkeld om de berekeningen mogelijk te maken. Ik ben hem ook zeer erkentelijk voor de vele discussies en raadgevingen die het mogelijk hebben gemaakt dit werk in goede banen te leiden. Verder wil ik hem ook danken voor zijn bereidheid om een deel van de figuren te maken.

Verder ben ook Prof. dr. ir. P. Verdonck zeer erkentelijk voor de ondersteuning die hij mij gegeven heeft om ook het klinisch deel van dit proefschrift in goede banen te leiden. Ik dank hem ook voor de vele leerrijke discussies en om mij wegwijs te hebben gemaakt in de biomedische wereld.

Tevens wens ik alle werknemers van het laboratorium voor machines en machinebouw te bedanken voor de aangename sfeer waarin dit onderzoek tot stand kon komen. Mijn dank gaat ook naar alle personen van de CFD-groep, meer speciaal naar dr. ir. K. Riemslag, dr. ir. J. Steelant, ir. S. Pattijn en ir. B. Merci, voor het nalezen van dit werk.

Graag had ik ook de collega's bedankt die deelnemen in het GOA-project 95-003 : 'Evaluatie van de linkerventrikelfunctie door fluïdodynamische simulatie'. De vele bijeenkomsten hebben steeds een positieve stimulans gegeven om dit werk te voltooien. Ik wens in het bijzonder Prof. Dr. ir. R. Verhoeven, dr. ir. P. Segers en ir. S. De Mey van het Laboratorium Hydraulica te bedanken voor de zinvolle discussies en Dr. T. De Backer (UZ Gent) voor haar bijdrage in het capteren van in vivo meetgegevens.

Mijn dank gaat ook uit naar Dr. P. Vandervoort (Hartcentrum Limburg, Genk) voor de zinvolle discussies en voor de meetgegevens die ik ter beschikking kreeg.

Allerlaatst, maar niet allerm minst wil ik mijn echtgenote Katrien, mijn ouders, broer en schoonzus, mijn schoonouders en schoonbroer bedanken voor de hulp bij het typen en het nalezen van dit werk, voor het helpen maken van figuren en voor de steun die ze mij bezorgden in de moeilijke momenten.

Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating dit proefschrift voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van het proefschrift te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit dit proefschrift.

De auteur,

Jan Vierendeels
juni 1998

Inhoud

1	Inleiding	1
1.1	Situering van de studie	1
1.2	Indeling van dit werk	4
2	Fysiologie van het cardiovasculair systeem	6
2.1	Het bloedvatenstelsel	6
2.1.1	De bloedsomloop	6
2.1.2	De perifere circulatie	8
2.2	Het hart	9
2.2.1	Ligging en bouw van het hart	9
2.2.2	Functie van het hart	11
2.2.3	Werking van het hart	11
2.2.3a	Algemeen	11
2.2.3b	Dynamica van de hartcyclus	12
2.2.3c	Diastolische functie en dysfunctie van de linkerventrikel	16

3	Intraventriculaire drukgradiënten in het linkerhart	20
3.1	Inleiding	20
3.2	Lokale drukgradiënten in de linkerventrikel	20
3.3	Invloed van de systolische functie	25
3.3.1	Verkorting van het myocardium	25
3.4	Atrio-ventriculaire drukgradiënten	26
3.5	Systolische dysfunctie	26
3.6	De isovolumetrische relaxatie	28
3.7	Besluit	29
4	Numerieke modellen met bewegende geometrie	30
4.1	Inleiding	30
4.1.1	Indeling volgens de beweging van de wand	30
4.1.2	Indeling volgens de complexiteit van het model voor de hartspierwand	31
4.1.3	Indeling volgens de gebruikte methode voor de stromingsberekening	31
4.2	Indeling volgens stromingsmethodes	33
4.2.1	Potentiaal- en wervelmethodes	33
4.2.1a	Model van Pedley	33
4.2.1b	Model van Cassot	34
4.2.1c	Model van Morvan	35

4.2.2	Ondergedompelde randen	37
4.2.2a	Model van Peskin	37
4.2.2b	Model van Vesier	41
4.2.3	Bewegende roosters	42
4.2.3a	Model van Redaelli	42
4.2.3b	Model van Chahboune	43
4.2.3c	Model van Taylor en Yamaguchi	45
4.2.3d	Model van Heude Bihannic	45
4.3	Discussie	46
4.4	Besluit	47
5	Het stromingsprobleem	48
5.1	Inleiding	48
5.2	Stationaire incompressibele stroming	49
5.2.1	Inleiding	49
5.2.2	Stromingsvergelijkingen	50
5.2.3	Ruimtelijke discretisatie	51
5.2.4	Tijdstap methode	54
5.2.4a	Evolutie in pseudo-tijd	55
5.2.4b	Bepaling van de pseudo-tijdstap	56
5.2.5	Fourier-analyse	58
5.2.5a	Semi-impliciete lijnmethode	62
5.2.5b	Semi-impliciete puntmethode	63

5.2.6	Generieke testgevallen	63
5.2.6a	Niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1$	64
5.2.6b	Niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$	67
5.2.6c	Niet-viskeuze stroming, gealigneerd aan de y-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$	69
5.2.6d	Viskeuze stroming, gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding 1000, $Re_{\Delta x}=100$	70
5.2.6e	Viskeuze stagnatiezone met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1$	73
5.2.6f	Viskeuze stagnatiezone met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$	77
5.2.7	'Backward facing step'	78
5.3	Discretisatie van de compressibele vergelijkingen	81
5.3.1	Inleiding	81
5.3.2	Compressibele vergelijkingen	82
5.3.3	Discretisatie van het niet-viskeuze subsysteem	83
5.3.4	Discretisatie van het viskeuze subsysteem	85
5.3.5	Discretisatie in de pseudo-tijd	86
5.3.6	Berekening op een 'backward facing step'	86
5.4	Discretisatie op niet-gestructureerde bewegende axisymmetrische roosters	89
5.4.1	Inleiding	89
5.4.2	Discretisatie	90
5.4.2a	Integratie in de tijd	90
5.4.2b	Ruimtelijke discretisatie	90

5.4.2c	Ruimtelijke-conservatiewet	92
5.4.2d	Discretisatie voor axisymmetrische geometrie	94
5.4.3	Iteratiemethode	96
5.4.4	Randvoorwaarden	97
5.4.5	Besluit	98
6	Verplaatsing van de hartspierwand	99
6.1	Inleiding	99
6.2	Voorstelling van de hartspierwand	100
6.2.1	Keuze van de geometrie	101
6.2.2	Constitutieve wetten voor de hartspierwand	104
6.2.2a	Constitutieve wet voor de passieve hartspierwand . . .	104
6.2.2b	Constitutieve wet voor de hartspierwand tijdens de relaxatie	106
6.3	Discretisatie van de hartspierwand	106
6.3.1	Evenwichtsvergelijkingen voor de bepaling van de verplaatsing van de hartspierwand	107
6.3.1a	Definitie van de rekken	108
6.3.1b	Opstellen van het krachteenevenwicht	109
6.3.1c	Randvoorwaarden	110
6.3.1d	Wet van Laplace	110
6.3.2	Oplossingsmethode voor de bepaling van de verplaatsing van de hartspierwand	112
6.3.3	Drukbeplating overeenkomstig met gegeven ventrikelvolume . . .	116
6.4	Bepaling van de parameters voor de constitutieve wetten	118

7	Roostergeneratie en -manipulatie	121
7.1	Inleiding	121
7.2	Delaunay-triangulatie	122
7.2.1	Voronoi-diagram en Dirichlet-constructie	122
7.2.2	Gebruikte kenmerken van de Delaunay-triangulatie in twee dimensies	124
7.2.2a	Uniciteit	124
7.2.2b	Omschreven cirkel criterium	124
7.2.2c	Zijde-cirkel-eigenschap	125
7.2.2d	Gelijkhoekigheid	125
7.3	Gebruikte Delaunay-triangulatiemethodes	126
7.3.1	Algoritme van Tanemura-Merriam	126
7.3.2	Zijde-wisselalgoritme van Lawson	128
7.4	Lokaal geschaalde ruimte	129
7.5	Opbouw van het rooster	130
7.5.1	Datastructuur	130
7.5.2	Beschrijving van de geometrie	132
7.5.3	Constructie van het rooster	136
7.6	Beweging van het rooster	139
7.6.1	Inleiding	139
7.6.2	Beschrijving van de methode	140
7.6.3	Keuze van ζ_0	143

7.6.4	Oplossingsmethode	144
7.6.4a	Jacobi iteraties na Newton linearisatie	144
7.6.4b	Gebruik van geneste iteraties	148
7.6.5	Generatie van grovere roosters	150
8	Vloeistof-wand interactie	151
8.1	Inleiding	151
8.2	Overzicht van de verschillende deelproblemen	152
8.2.1	Stromingsprobleem	152
8.2.2	Verplaatsing van de hartspierwand	152
8.2.3	Verplaatsing van het rooster	154
8.3	Evolutie in de tijd	155
8.3.1	Gekoppelde oplossing van de deelproblemen	156
8.3.2	Bepalen van de lineaire drukverdelingsfunctie op de wand	159
8.4	Golfvoortplanting in een cilindrische buis met elastische wand	160
8.5	Besluit	162
9	Simulatie van de vulling van de linkerhartkamer	163
9.1	Inleiding	163
9.2	Referentieberekening	163
9.2.1	Opzetten van de referentieberekening	163
9.2.2	2D snelheidspatronen tijdens de vulling	166
9.2.3	Controle van massabehoud	170
9.2.4	Partikelbeweging	172

9.2.5	Klinische toepassingen	174
9.2.5a	Simulatie van 2D echo-Doppler beelden	174
9.2.5b	Intraventriculaire drukgradiënten	181
9.2.5c	Kleuren Doppler M-mode	187
9.2.5d	Niet-stationaire Bernoulli-vergelijking	190
9.3	Parameterstudie	194
9.3.1	Invloed van de snelheid van de relaxatie van de ventrikel	194
9.3.2	Invloed van de compliantie van de ventrikelwand	199
9.3.2a	2D simulatie	199
9.3.2b	1D analyse	199
9.3.2c	Besluit	205
9.3.3	Invloed van de amplitude van de vullingsgolven	206
9.3.4	Invloed van de atriale druk	212
9.3.5	Discussie en besluit	213
10	Besluit en aanbevelingen	214
A	Discretisatie van de viskeuze fluxen op een niet-gestructureerd rooster	217
B	Beschrijving van de rand	221
B.1	Interpolerende veelterm tussen twee controlepunten	222
B.2	Bepaling van de interpolerende spline	223

C	Eéndimensionaal model voor de stroming in de linkerhartkamer	226
C.1	Opbouw van het model	226
C.2	Wetten die de bloedstroming beschrijven	227
C.3	Wetten die de hartspier beschrijven	228
C.4	Wetten die de interactie tussen bloed en hartspier beschrijven	229
C.5	Discretisatie van de vergelijkingen	230
C.5.1	Stationaire stroming van een incompressibele vloeistof in een elastisch kanaal	231
C.5.2	Uitbreiding naar een niet-stationaire stroming	235
C.5.3	Beweging van de randen wordt in rekening gebracht	236
C.5.4	Discretisatie van de vergelijking van Laplace	237
C.5.5	Discretisatie van het krachtenevenwicht in axiale richting	240
C.6	Overzicht van de vergelijkingen	241
C.7	Randvoorwaarden	242
C.7.1	Inlaat	242
C.7.2	Uitlaat	243
C.8	Oplossen van de gediscretiseerde vergelijkingen	244

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Situering van de studie

De fundamentele taak van het cardiovasculair systeem bestaat erin de verschillende weefsels en organen te voorzien van zuurstof en energierijke substraten. Het hart is hierbij het orgaan dat de circulatie van het bloed in het cardiovasculair systeem in gang houdt. Het werkt als een pomp. Het hart bestaat uit twee helften, het rechterhart en het linkerhart. Het rechterhart pompt bloed naar de longen waar de druk relatief laag is. Het linkerhart pompt bloed via de aortaklep en de aorta naar de andere organen en dit bij een relatief hoge druk. Elke harthelft is onderverdeeld in een voorkamer (atrium) en kamer (ventrikel). De klep die zich tussen het linkeratrium en de linkerventrikel bevindt is de mitraalklep.

Eén van de belangrijkste doodsoorzaken in onze maatschappij is hartfalen door arteriële hypertensie (hoge bloeddruk), myocardischemie (plaatselijke bloedeloosheid in de hartspier zodat de toevoer van zuurstof onderbreekt, myocard : hartspier) en myocardinfarct (acute myocardischemie) ten gevolge van het proces van atherosclerose (aderverkalking). Hartfalen is een klinisch teken van ernstige systolische en/of diastolische dysfunctie. De systolische functie van het linkerhart is de eigenschap van de linkerventrikel om een adequaat slagvolume te ejecteren, terwijl de diastolische functie een adequate vulling van de linkerventrikel betekent. In tegenstelling tot de systolische functie is de diastolische functie veel minder intensief bestudeerd. Nochtans is de linkerventrikelfunctie tijdens de diastole zeer belangrijk voor het normaal functioneren van het cardiovasculair systeem. Een normale diastolische functie van de linkerventrikel impliceert een adequaat eind-diastolisch vullingsvolume zonder verhoogde eind-diastolische druk. Het hart kan immers niet meer bloed ejecteren dan het ontvangt. Bijgevolg is de diastolische functie van de linkerventrikel een belangrijke determinant van het hartdebiet. Diastolische dysfunctie is dan ook een belangrijke

oorzaak van hartfalen. Vaak wordt diastolische dysfunctie gevonden bij arteriële hypertensie waarbij de systolische functie nog normaal is.

Naast veel invasieve technieken (catheterisatie, ventriculografie, ...) zijn de recentste niet-invasieve technieken voor de kwantificatie van de diastolische functie gebaseerd op Dopplerechocardiografie. Met deze techniek wordt naast de anatomische beeldvorming van het hart of hartstructuren ook de snelheid van de bloedstroming gemeten. Deze techniek wordt algemeen aanvaard en gebruikt voor onderzoek naar de ernst van mitraalklepgebreken (stenose : vernauwing van de klep en regurgitatie : terugstroming doorheen de klep). De techniek blijft ontoereikend voor de evaluatie van de diastolische functie. Er is zeker een rechtstreeks verband tussen het snelheidspatroon doorheen de mitraalklep en de vulling van de linkerventrikel tijdens de diastole. Dopplerechocardiografisch onderzoek laat echter vooralsnog niet toe om onderscheid te maken tussen de parameters die de transmitraalstroming beïnvloeden waaronder relaxatie van het myocard, longvenen, atriale systole, variatie van de klepoppervlakte, geometrie van het mitraalapparaat, compliantie (inverse van stijfheid) van linkeratrium en -ventrikel, hartfrequentie, voorbelasting (druk in het atrium), nabelasting (druk in het arterieel systeem), contractiliteit en de interactie tussen de linker- en rechterventrikel.

De recente technische evolutie inzake beeldvorming en beeldbehandeling heeft de kwaliteit van de gegevens bekomen met echocardiografie (30 tot 40 beelden per seconde) en Dopplerechocardiografie sterk verbeterd. Men is momenteel in staat om tweedimensionale snelheidsbeelden van de bloedstroming in het hart te capteren. Dit gebeurt aan een snelheid van 10 tot 20 beelden per seconde afhankelijk van de grootte van het beeldsegment waarin men geïnteresseerd is. De Dopplertechnieken waarbij langsheen één scanlijn (kleuren Doppler M-mode) of in één meetvolume (gepulste Doppler) wordt gemeten leveren snelheidsinformatie op aan 200 metingen per seconde. In de toekomst mag men nog een grote vooruitgang verwachten, vooral in de frequentie waarmee de beelden achtereenvolgens worden gegenereerd en in het aantal dimensies waarbij de snelheidsinformatie wordt opgemeten.

De snelheidsinformatie bekomen uit de Dopplerechometingen geven geen rechtstreekse informatie over de drukken in de hartkamers. Het drukverschil tussen atrium en ventrikel wordt uit deze Dopplermetingen in de dagelijkse klinische echopraktijk begroot door gebruik te maken van de vereenvoudigde Bernoulli-vergelijking ($\Delta p = 4v^2$), waarbij het drukverschil in mmHg wordt uitgedrukt en de snelheid in m/s. Deze snelheid wordt gemeten ter hoogte van de toppen van de mitraalklep. De toepassing van de vereenvoudigde Bernoulli-vergelijking veronderstelt een verwaarloosbare snelheid in het atrium, alignering van de snelheidsrichting met de richting van de Dopplersonde, geen drukherwinning in de ventrikel en een verwaarlozing van de viskeuze krachten en van de inertiekrachten. Deze vereenvoudigde Bernoulli-vergelijking mag echter alleen worden gebruikt bij stenotische (vernauwde) kleppen.

Recente studies [49] hebben immers aangetoond dat bij normale kleppen de inertiekrachten wel belangrijk zijn en in belangrijke mate bijdragen tot de atrio-ventriculaire drukverschillen. In dit geval moet de instationaire Bernoulli-vergelijking worden gebruikt om uit de niet-invasief gemeten snelheidsinformatie drukverschillen te begroten.

Wanneer men nu de invloed van bepaalde parameters zoals de compliantie van het atrium en de ventrikel, de tijdsconstante van de ventrikelrelaxatie, mitraalklepoppervlakte, atriale druk, ... afzonderlijk wil bestuderen zijn geen eenvoudige vergelijkingen voorhanden (zoals de Bernoulli-vergelijking) die een verband uitdrukken tussen de gemeten snelheidsinformatie en voorgenoemde parameters. In de klinische praktijk is het ook zeer moeilijk om in vivo de invloed van elk van deze parameters afzonderlijk te bestuderen. Bij wijziging van één van deze parameters worden immers onvermijdelijk een aantal andere parameters eveneens gewijzigd. Om dit probleem te verhelpen is een numerieke modellering van de hartfunctie noodzakelijk. Numerieke modellen laten immers toe om eerst elk van de parameters afzonderlijk te wijzigen en hun invloed na te gaan, om nadien gecombineerde parameterwijzigingen te bestuderen.

Bij het opstellen van een numeriek model dient men met een aantal beschouwingen rekening te houden. Eerst en vooral dient het fysische systeem in een wiskundige vorm te worden gegoten. Hierbij moet men een aantal vereenvoudigingen doorvoeren om te vermijden dat het model nodeloos ingewikkeld wordt. Maakt men echter te grote vereenvoudigingen, dan loopt men het risico een aantal interessante karakteristieken van het systeem te verwaarlozen. Het komt er dus op aan de juiste balans te vinden zodat het model de gewenste karakteristieken op correcte wijze kan reproduceren.

De meeste hartmodellen die tot nog toe ontwikkeld werden om de invloed van bovengenoemde parameters te bestuderen zijn 'lumped' parameter modellen (bv. model van Thomas [129, 130]). Hierbij worden ruimtelijk verdeelde parameters zoals druk en snelheid gereduceerd tot één waarde in een bepaald punt. Met deze modellen is men in staat geweest om de bovengenoemde invloeden op de transmitraalstroming die met de gepulste Dopplertechniek wordt gemeten, te bestuderen. Het is echter evident dat dergelijke modellen niet toelaten om bijvoorbeeld de ruimtelijke snelheidsverdeling in de hartkamers te modelleren. Deze ruimtelijke snelheidsverdeling kan worden gemeten in functie van de tijd met de kleuren Doppler M-mode techniek. Om deze lokale snelheidsvariëaties in de hartkamers en de voortplanting van deze snelheidsgolven te kunnen simuleren, is het dus nodig andere modellen te ontwikkelen die deze ruimtelijke verdeling wel in rekening brengen. In dit werk wordt een tweedimensionaal axisymmetrisch model van de linkerhartkamer ontwikkeld dat toelaat om invloed van parameters zoals compliantie en relaxatie van de hartspierwand op de spatio-temporele snelheidsverdeling na te gaan.

Om dit te verwezenlijken wordt gebruik gemaakt van de numerieke stromingsmechanica (Computational Fluid Dynamics, CFD). Dit vakgebied heeft een grote evo-

lutie doorgemaakt gedurende de laatste 35 jaren. Na het ontstaan in het begin van de zestiger jaren voor analyse van vleugelprofielen wordt het vandaag gebruikt voor aërodynamisch en hydrodynamisch ontwerp in een brede waaier van toepassingen. Waar vroeger een verschillende aanpak bestond voor compressibele en incompressibele toepassingen, slaagt men er nu in om met éénzelfde aanpak zowel compressibele als incompressibele stromingsberekeningen uit te voeren.

Het is ook op dit vlak dat in dit werk een belangrijke bijdrage wordt geleverd. Er wordt immers een nieuwe methode uitgewerkt die toelaat om de incompressibele stromingen en compressibele stromingen met laag Mach-getal te berekenen. Deze methode is zodanig ontworpen dat convergentie van de methode onafhankelijk is van de rooster-aspectverhouding en in het geval van de compressibele stroming ook onafhankelijk is van het Mach-getal. Gezien de verdere toepassing van de methode naar incompressibele stroming in bewegende geometrieën (de linkerhartkamer) waarbij de vloeistof-wand interactie een hoofdrol speelt, is de uitbreiding voor hoge Mach-getallen niet gebeurd.

1.2 Indeling van dit werk

In het volgende hoofdstuk (hoofdstuk 2) wordt de fysiologie van het cardiovasculair systeem behandeld. Dit hoofdstuk is bedoeld om de ingenieur vertrouwd te maken met een aantal medische begrippen die verder in dit werk worden gebruikt. Er wordt ook uitgelegd hoe de volledige hartcyclus is opgebouwd.

Nadien wordt een overzicht gegeven van de literatuur omtrent optredende intraventriculaire drukgradiënten tijdens de vullingsfase van de linkerhartkamer (hoofdstuk 3). Deze opgemeten intraventriculaire drukgradiënten zullen immers als kwalitatieve vergelijkingsbasis gebruikt worden voor het in dit werk ontwikkelde model.

Alvorens over te gaan tot de beschrijving van het ontwikkelde model zal in hoofdstuk 4 een overzicht worden gegeven van de bestaande numerieke modellen voor stromingsberekeningen in de hartkamers. Uitgaande van deze literatuurstudie worden er argumenten aangebracht die de aanpak verrechtvaardigen die in dit werk wordt gevolgd.

Hoofdstukken 5 t.e.m. 8 omvatten dan de opbouw van het numeriek model voor de linkerhartkamer. In hoofdstuk 5 wordt het stromingsprobleem behandeld. In dit hoofdstuk wordt het nieuw ontwikkelde algoritme uiteengezet en toegepast op zowel incompressibele stromingen als compressibele stromingen met laag Mach-getal.

In hoofdstuk 6 wordt de verplaatsing van de hartspierwand behandeld. Deze verplaatsing is een gevolg van optredende drukken in de linkerhartkamer en optredende

spanningen in de hartspierwand. Door deze verplaatsing van de wand moet ook het rekenrooster voor de stromingsberekening meebewegen. De opbouw van het rooster en een robuust algoritme voor deze roosterverplaatsing wordt behandeld in hoofdstuk 7.

De koppeling tussen de in hoofdstuk 5 tot 7 beschreven deelproblemen wordt behandeld in hoofdstuk 8. Er wordt als toepassing de golfvoortplanting in een cilindrische buis met elastische wand berekend en de bekomen golfvoortplantingssnelheid wordt vergeleken met de analytische waarde uit de Moens-Korteweg vergelijking.

In hoofdstuk 9 wordt dan uiteindelijk de vulling van de linkerhartkamer gesimuleerd. Eerst wordt een referentieberekening gedaan met fysiologisch gekozen parameters. Nadien wordt een parameterstudie gedaan om de invloed van enkele belangrijke fysiologische determinanten te bestuderen.

Tenslotte worden in hoofdstuk 10 enkele besluiten en aanbevelingen geformuleerd.

Hoofdstuk 2

Fysiologie van het cardiovasculair systeem

Het menselijk lichaam is een ingewikkeld meercellig organisme. Vanwege zijn omvang is de cel-tot-cel communicatie en uitwisseling ontoereikend en is er bijgevolg nood aan een gespecialiseerd systeem dat uitwisseling en communicatie tussen de verschillende delen mogelijk maakt. De mens beschikt hiervoor over twee belangrijke systemen :

- het hart- en bloedvatenstelsel (convectiesysteem)
- het zenuwstelsel (conductiesysteem)

Het hart- en bloedvatenstelsel of cardiovasculaire systeem heeft als doel een voldoende hoeveelheid bloed per tijdseenheid, onder voldoende druk ter beschikking te stellen aan de weefsels. Via het bloed worden de cellen van zuurstof en voedingsstoffen voorzien, en worden afbraakstoffen afgevoerd. Het hart- en bloedvatenstelsel is opgebouwd uit drie onderdelen : het hart, het bloedvatenstelsel en het bloed.

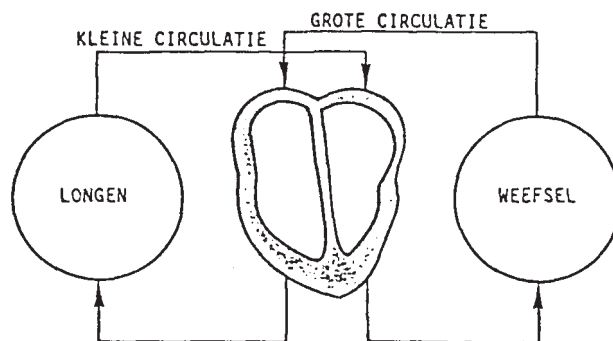
2.1 Het bloedvatenstelsel

2.1.1 De bloedsomloop

Het bloedvatenstelsel vormt een gesloten buizensysteem waarin het bloed met grote snelheid door de activiteit van het hart wordt rondgepompt en kan naargelang de functie opgedeeld worden in twee systemen. Enerzijds voeren slagaders of arteriën het bloed van het hart weg (arteriële systeem), anderzijds voeren aders of venen het

bloed naar het hart terug (veneuze systeem). Op de overgang tussen beide liggen de haarvaten- of capillairnetten, waarin de stofwisseling plaatsvindt.

Het bloed stroomt vanuit het hart in de aorta, die zich vervolgens opsplijt in de grote arteriën. Zowel de wand van de aorta als van de grote arteriën bevat naast bindweefsel een relatief grote hoeveelheid elastineweefsel. Hierdoor kunnen deze vaten tijdens de hartslag uitzetten, waarna ze hun oorspronkelijke diameter terug aannemen. Hierdoor fungeren ze als een buffer (windketeleffect). Via de arteriën stroomt het bloed vervolgens naar de arteriolen. De arteriolaire wand bevat een grote hoeveelheid spierweefsel en kan onder invloed van de autonome bezuwning voor actieve diameterveranderingen zorgen. De arteriolen vertakken zich op hun beurt in capillairen of haarvaten. Na de stofwisseling in de weefsels voegen deze zich samen tot venulen, die zich vervolgens verenigen in de venen, die het bloed naar het rechterhart terugvoeren. Vanuit het hart stroomt het bloed vervolgens via de longslagader naar de longen. Via vier longvenen stroomt het terug naar het hart. Aldus kan een onderscheid gemaakt worden tussen de grote circulatie (perifere of systemische circulatie) en de kleine circulatie (pulmonale of longcirculatie) (figuur 2.1). Figuur 2.2 toont een gedetailleerde voorstelling van de bloedsomloop.

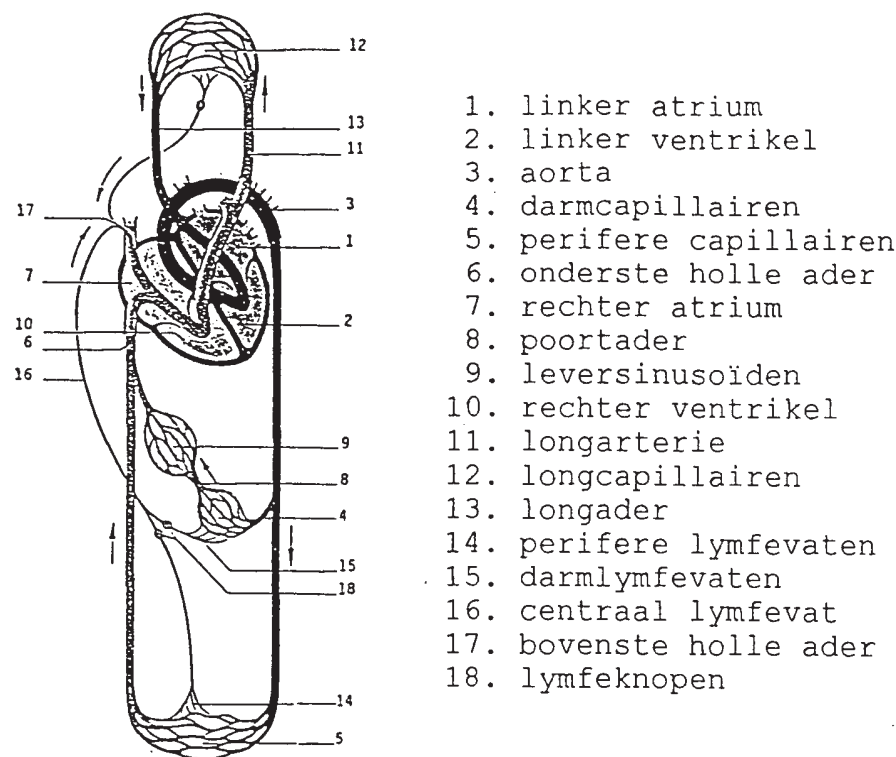


Figuur 2.1: Schematische voorstelling van de bloedsomloop.

De circulaties hebben functioneel een heel eigen betekenis. De perifere circulatie voert zuurstof uit de longen naar de organen en weefsels en voert afbraakproducten, afkomstig van de stofwisseling van de cellen, af. De perifere circulatie is een hoge druk gebied en wordt gekenmerkt door een driefasisch drukverval (figuur 2.3) :

- van linkerventrikel tot arteriolen : 100 mmHg - 80 mmHg
- van arteriolen tot capillairen : 80 mmHg - 10 mmHg
- van venulen tot rechteratrium : 10 mmHg - 0 mmHg

Vanwege hun geringe weerstand worden de arteriën de geleidingsvaten genoemd. Arteriolen en capillairen noemt men de weerstandsvaten, de venulen en venen de capaciteitsvaten.



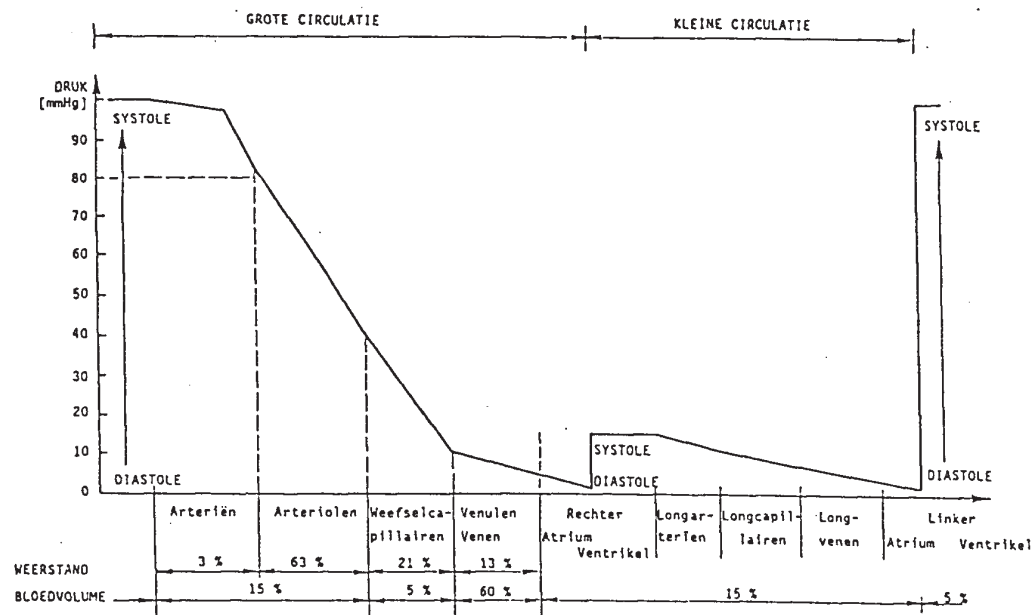
Figuur 2.2: Gedetailleerde weergave van de bloedsomloop.

De pulmonale circulatie heeft vooral als functie het bloed in de longen opnieuw te beladen met zuurstof en er koolzuur af te staan (ademhaling). De kleine circulatie is een lage druk gebied en het drukverval verloopt er continu : rechteratrium (15 mmHg) - linkerventrikel (0 mmHg). Dit lineaire drukverval is een gevolg van de homogene verdeling van de geringe weerstand over één vaatgebied (figuur 2.3).

Behalve het transport van bloed vervult het vaatstelsel nog een belangrijke, zij het minder opvallende functie : het vormt een reservoir voor het bloed. Het kan een extra hoeveelheid bloed opslaan, zonder dat er per minuut ook meer bloed door de weefsels stroomt.

2.1.2 De perifere circulatie

Het hartdebiet wordt continu verdeeld over de verschillende organen en vaatgebieden in functie van de metabole en/of niet-metabole behoeften. Vanuit anatomisch standpunt kunnen zes grote, parallel geschakelde gebieden onderscheiden worden : (1) hersenen, (2) myocard, (3) huid, (4) nieren, (5) gastro-intestinale organen en (6) skeletspieren. Bij een constante arteriële bloeddruk (Δp : constant drukverschil tussen aorta en rechteratrium) treedt een wijziging in lokaal debiet op door een gewijzigde weerstand (ter hoogte van de arteriolen).



Figuur 2.3: Schematische voorstelling van de gemiddelde bloeddruk in het cardiovasculair systeem.

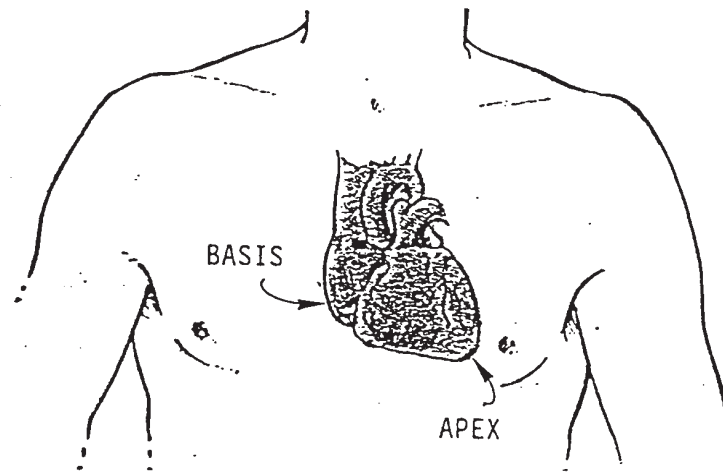
2.2 Het hart

2.2.1 Ligging en bouw van het hart

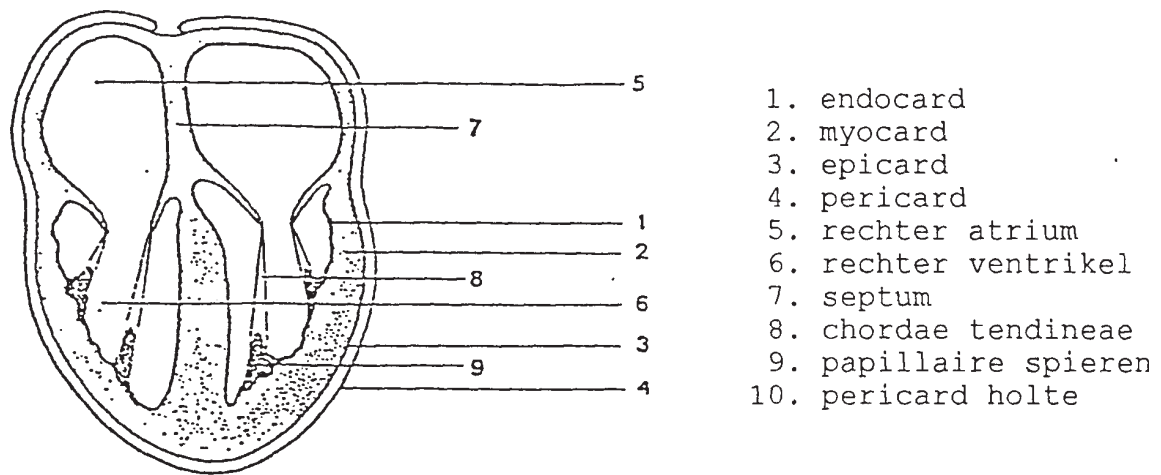
Het hart is een kegelvormig, hol orgaan dat zich in de borstholte bevindt (figuur 2.4). De as verloopt van rechts, boven, achter (basis) naar links, onder, voor (apex). Het hart heeft de grootte van een gebalde vuist en weegt ongeveer 300 g.

De wand bestaat voornamelijk uit spierweefsel. De dikte varieert naargelang de functie van het hartdeel. De spierwand van de ventrikels is hierbij aanzienlijk dikker, voornamelijk in de linkerventrikel. Dit is nodig om de nodige arbeid te kunnen leveren bij het voortstuwen van het bloed.

Het hart is ingedeeld in vier hartholten : linker- en rechtervoorkamer (atria) en linker- en rechterkamer (ventrikels). Tussen voorkamer en kamer bevinden zich de atrio-ventriculaire kleppen (links de bicuspidale of mitraalklep, rechts de tricuspidale klep). Deze kleppen worden ondersteund door bindweefselsnoeren of chordae tendineae, die het doorslaan van de kleppen moeten beletten. De chordae tendineae zijn met de hartspier verbonden door middel van de papillairspieren. Linker- en rechterventrikel (respectievelijk atrium) zijn van elkaar gescheiden door een tussenschot, het interventriculair (respectievelijk interatriaal) septum (figuur 2.5).



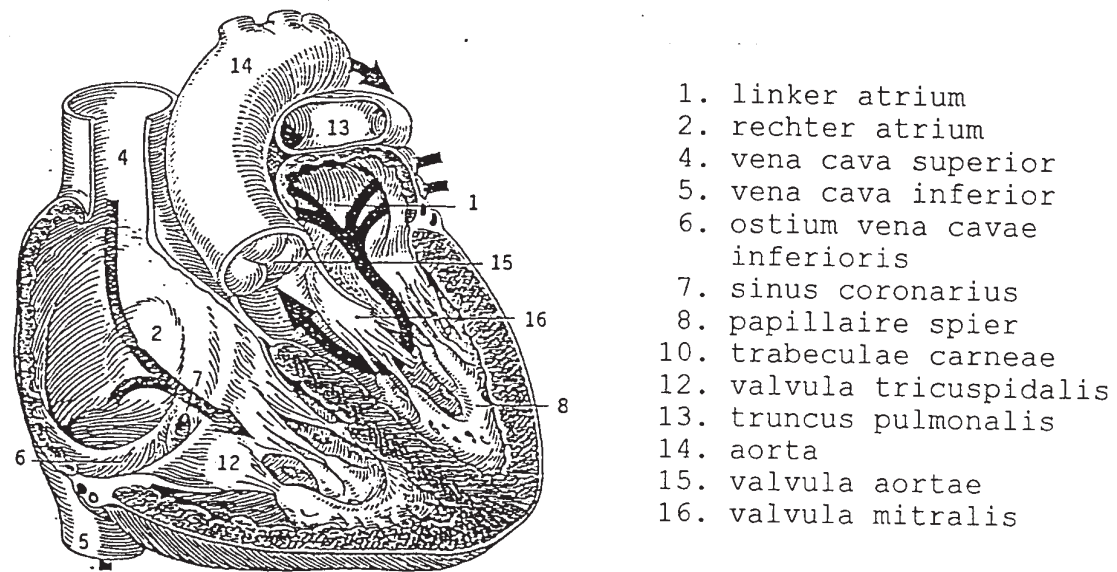
Figuur 2.4: Ligging van het hart in de borstholte.



Figuur 2.5: Hartdoorsnede.

Uit de beide ventrikels ontspringen de grote arteriën : rechts de longslagader (arteria pulmonalis) en links de lichaamsslagader (aorta). Aan het begin van de beide grote slagaders bevinden zich telkens drie halvemaaanvormige kleppen (valvulae semilunares), links de aortaklep en rechts de arteria-pulmonalisklep. Deze halvemaaanvormige kleppen worden gestuurd door de drukverschillen tussen rechterventrikel en longslagader respectievelijk linkerventrikel en aorta (figuur 2.6).

In de beide atria monden de venen uit, die naar het hart toe leiden. In het rechteratrium bevindt zich de uitmonding van de grote lichaamsvenen, de bovenste (vena cava superior) en de onderste (vena cava inferior) holle aders die het zuurstof-arm bloed uit de periferie naar het rechterhart brengen. In het linkeratrium monden vier longvenen (venae pulmonales) uit, twee komende uit elke long, die het zuurstofrijke bloed uit de longen terug voeren naar het linkerhart.



Figuur 2.6: Driedimensionale voorstelling van het hart.

2.2.2 Functie van het hart

Het hart heeft als functie het nodige drukverschil te handhaven opdat bloedstroming doorheen het menselijk lichaam zou kunnen plaatsgrijpen. Bij iedere doorstroming van het menselijk lichaam passeert het bloed tweemaal het hart. Het hart kan gemodelleerd worden als twee in serie geplaatste pompen die een constant debiet leveren (ongeveer 5 l/min in rust). Het rechterhart verzorgt de longcirculatie en werkt op lage druk (gemiddelde druk van 10 mmHg). Het linkerhart bedient de perifere circulatie en werkt op hoge druk (gemiddelde druk van 100 mmHg).

2.2.3 Werking van het hart

2.2.3a Algemeen

Het hart is een holle spier die een ritmische activiteit ondergaat, gestuurd door het geleidingsweefsel. De hartcyclus kan opgedeeld worden in een contractiefase of systole, afgewisseld met een rust-, ontspannings- of relaxatiefase, de diastole. De hartpomp werkt derhalve discontinu. De duur van de hartcyclus is afhankelijk van de hartfrequentie (aantal hartcycli per minuut). Voor een normale frequentie van 75 slagen per minuut duurt één cyclus 800 ms met ongeveer 500 ms diastole en 300 ms systole. Bij een frequentiestijging tot bijvoorbeeld 150 slagen per minuut duurt één cyclus 400 ms (diastole 150 ms, systole 250 ms). Deze proportioneel sterkere daling van de diasto-

lische tijd ten overstaan van de systolische tijd beperkt de maximale hartfrequentie. Door onvoldoende diastolische vulling ontstaat bij frequenties hoger dan 200 slagen per minuut circulatoire insufficiëntie.

2.2.3b Dynamica van de hartcyclus

Gedurende de hartcyclus treden sterke drukveranderingen op in de ventrikels. Een hartcyclus wordt onderverdeeld in zes perioden die elk hun eigen karakteristiek verloop kennen (figuur 2.7 en 2.8).

Fase 1 : atriumcontractie Aan het einde van de diastole geeft de sinusknop een prikkel, die door de spierwand van het atrium wordt overgenomen. De spiercellen rondom de sinusknop contraheren en deze contractie plant zich geleidelijk aan voort over de beide atria. De tijd die verstrijkt tot beide atria in contractie zijn, bedraagt ongeveer 50 tot 100 ms. Doordat de contractie begint bij de sinusknop, wordt eerst de toegang van de beide holle aderen tot het rechteratrium vernauwd. Daardoor wordt het bloed in het atrium naar de ventrikel toegedreven, dat daardoor nog een extra vulling krijgt (systole van het atrium). Hierdoor wordt de ventrikelwand iets meer uitgerekt waardoor een hogere spanning ontstaat in de wand en bijgevolg een hogere druk. Het belang van deze atriale 'kick' neemt toe met stijgende hartfrequentie. Tijdens de atriumcontractie treedt niet alleen in de atria maar ook in de ventrikels een drukverhoging van 0 tot 5 mmHg op. Hoewel deze drukverhoging niet groot is, is ze toch zeer belangrijk. Nog voor de ventrikelcontractie aanvangt, treedt een verslapping van de atriumspier op. Hierdoor daalt de druk in het atrium en ontstaat een drukverschil tussen ventrikel en atrium waardoor het bloed zou kunnen terugstromen van de ventrikel naar het atrium. Dit gebeurt echter niet omdat onder invloed van dit drukverschil de atrio-ventriculaire kleppen onmiddellijk gesloten worden. De atriumcontractie komt op het electrocardiogram overeen met de P-top.

Fase 2 : isovolumetrische contractie De contractie van de atriumspier loopt dood op de fibreuze ring tussen atrium en ventrikel omdat het bindweefsel de prikkels niet geleidt. De prikkel wordt wel, zij het met enige vertraging, overgenomen door de atrio-ventriculaire knop. Van hieruit wordt de prikkel via de bundel van His zeer snel naar alle delen van de ventrikel geleid. Dit heeft tot gevolg dat de hele ventrikelwand nagenoeg gelijktijdig in contractie komt. Door de toenemende spanning in de ventrikelwand wordt de druk in de ventrikel snel hoger. Deze contractie is dus wezenlijk anders dan die van het atrium. Het begin van de ventrikelsystole wordt gekenmerkt door een zeer snelle stijging van de druk in de ventrikels waardoor de atrio-ventriculaire kleppen strak gespannen worden. Tegelijk met de contractie van de ventrikelwand contraheren ook de papillaire spieren, die via de chordae tendineae de randen van de kleppen vasthouden. De kleppen worden als het ware als zeilen opgespannen, wat het doorslaan van de kleppen onder de enorme bloeddruk verhin-

dert. Het bloed in de ventrikels kan nu nog maar één kant op : naar de grote arteriën. Niet alleen de atrio-ventriculaire, maar ook de halvemaanvormige kleppen zijn gesloten ten gevolge van de hogere druk in de aorta en de longslagader ten opzichte van de druk in linker-, respectievelijk rechterventrikel. De eerste fase van de ventrikelsystole vindt aldus plaats zonder dat bloed kan wegstromen : met andere woorden, deze fase vindt plaats bij gelijkblijvend volume. Men noemt dit de isovolumetrische ventrikelcontractie. Overschrijdt de intraventriculaire druk de diastolische druk in de bijhorende slagader, de aorta (90 mmHg), respectievelijk de longslagader (10 mmHg), dan worden de halvemaanvormige kleppen opengedrukt en wordt het bloed uit de linkerventrikel naar de aorta en uit de rechterventrikel naar de longslagader geperst. Op het moment dat de halvemaanvormige kleppen opengedrukt worden door de toenemende intraventriculaire druk, eindigt de isovolumetrische contractiefase en begint de uitdrijvings- of ejectiefase. De ventrikelcontractie komt op het electrocardiogram overeen met het QRS-complex.

Fase 3 : de ejectiefase De ejectiefase kan opgedeeld worden in een periode van snelle drukstijging tot gemiddeld 130 mmHg systolische linkerventrikeldruk, gevolgd door een langere fase van geleidelijke drukvermindering tot het einde van de systole. De tijdsduur bedraagt ongeveer 250 ms. In de rechterventrikel is de drukstijging beperkt tot 30 mmHg. Tijdens de eerste kortdurende periode vindt een snelle uitdrijving van relatief veel bloed plaats. Dit bloed veroorzaakt een toenemend volume in de arterie doordat in de periferie het bloed niet onmiddellijk kan wegstromen ten gevolge van de weerstand die het stromende bloed in de bloedvaten ondervindt. Door de toename van het volume in het arteriële stelsel treedt een uitzetting van de bloedvatwand op, waardoor meer spanning wordt opgewekt en het bloed onder hogere druk komt te staan. Doordat de ventrikels het bloed uitdrijven tegen een toenemende druk, neemt ook de druk in de ventrikels toe.

In de tweede periode van de ejectiefase neemt de druk in het arteriële stelsel weer af. Doordat meer bloed wegstroomt dan in het arteriële gebied binnenstroomt, neemt het volume in het arteriële gebied van het linker- zowel als de rechterventrikel af en daardoor de uitzetting van de vaatwand waardoor een drukdaling plaats vindt. Ook in de ventrikels treedt een drukdaling op. Het bloed dat nu onder hoge druk in de arteriën zit, zal terug willen stromen. Hierdoor worden de halvemaanvormige kleppen gevuld en gaan bol staan, zodat het bloed in de arteriën wordt vastgehouden. Het begin van de ventrikelrelaxatie wordt op het electrocardiogram gezien als de T-top.

Fase 4 : isovolumetrische relaxatie De eerste fase van de ventrikelverslapping vindt plaats bij gesloten halvemaanvormige kleppen en gesloten atrio-ventriculaire kleppen. Deze laatste blijven nog steeds gesloten door de hogere intraventriculaire druk ten opzichte van de druk in de atria. Deze relaxatiefase wordt de isovolumetrische relaxatiefase genoemd. Gedurende deze relaxatiefase treedt zeer snel een drukdaling op. De tijdsduur bedraagt 50 tot 100 ms.

Fase 5 : snelle vulling Wordt de intraventriculaire druk lager dan de druk in de atria, dan gaan de atrio-ventriculaire kleppen open en stroomt de ventrikel snel vol bloed, mede doordat tijdens de contractiefase het toestromende veneuze bloed in de grote aderen en atria werd opgehoopt. De snelheid waarmee deze vulling optreedt, hangt mede af van het verschil in druk tussen de borst- en buikholte. In de buikholte heerst altijd een hogere druk dan in de borstholte, waardoor het bloed naar de borstholte wordt gedreven. Tijdens deze fase wordt de ventrikel nagenoeg geheel gevuld en gaat de verslapping nog verder maar de drukdaling is veel minder steil geworden door de snelle vulling. De druk wordt bij volledige verslapping van de linkerventrikel ongeveer gelijk aan de intrathoracale druk : ongeveer -5 mmHg.

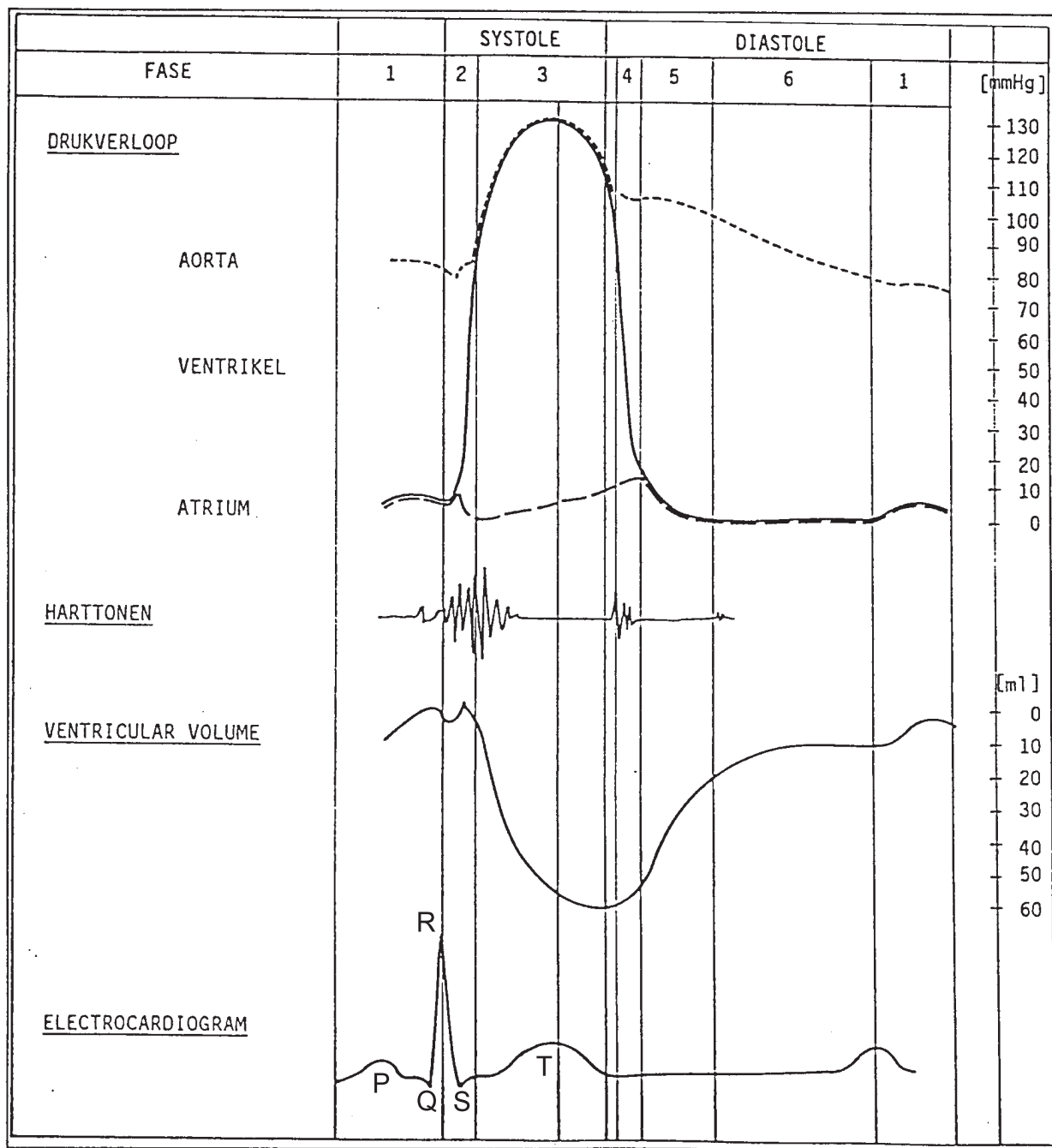
Fase 6 : diastase Tot het tijdstip waarop een nieuwe atriumcontractie plaatsvindt, treedt een meer geleidelijke vulling op. Het bloed dat via de longvenen in het atrium stroomt kan doorstromen naar de ventrikel.

Tijdens een hartcyclus verloopt de druk in de rechterventrikel analoog aan die in de linkerkamer. Er is echter een duidelijk verschil in de grootte van de druktoename te wijten aan de veel lagere druk in de longslagader.

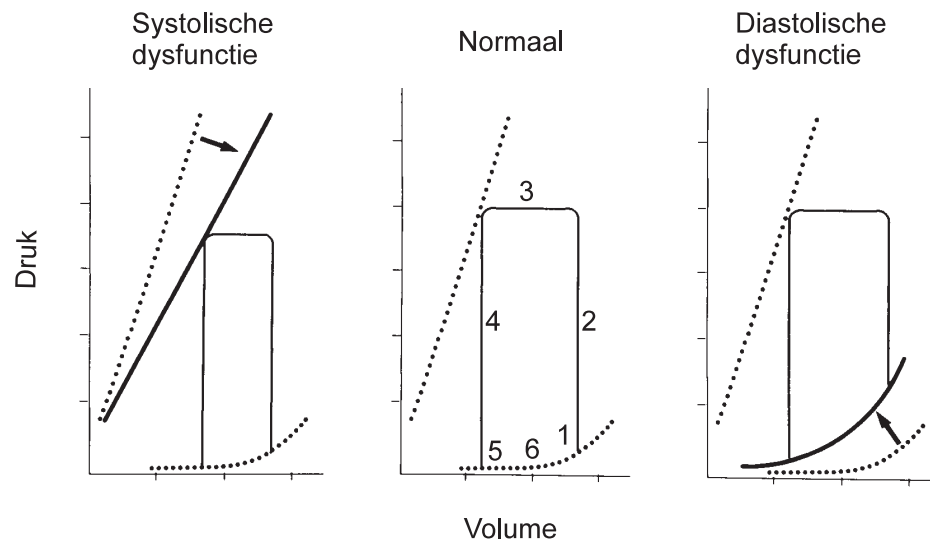
Tabel 2.1 toont het tijdsverloop van een hartcyclus bij een hartfrequentie van 75 slagen per minuut. Er wordt aangegeven hoeveel tijd de verschillende fasen in beslag nemen.

Fase	Tijdsduur [ms]	Atrium	Ventrikel
(2) Isovolumetrische contractie	50	Diastole 700-750 ms	Systole 300 ms
(3) Ejectiefase	250		Diastole 500 ms
(4) Isovolumetrische relaxatie	50-100		
(5) Snelle vulling	100-150		
(6) Diastase	100-150	Systole 50-100 ms	
(1) Atriale contractie	50-100		
		800 ms	800 ms

Tabel 2.1: Tijdsverloop van een hartcyclus bij een hartfrequentie van 75 slagen per minuut.



Figuur 2.7: De hartcyclus.

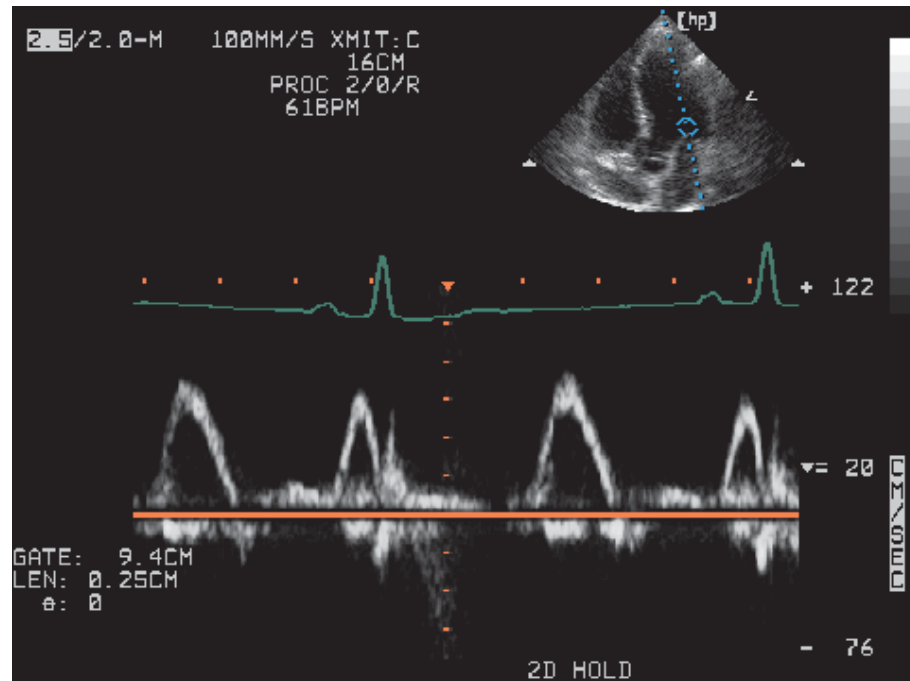


Figuur 2.8: Midden : Normaal druk-volumeverband met aanduiding van de verschillende fasen tijdens de hartcyclus (zie figuur 2.7). Links : Wijziging in druk-volumeverband door systolische dysfunctie. Rechts : Wijziging in druk-volumeverband door diastolische dysfunctie. [39]

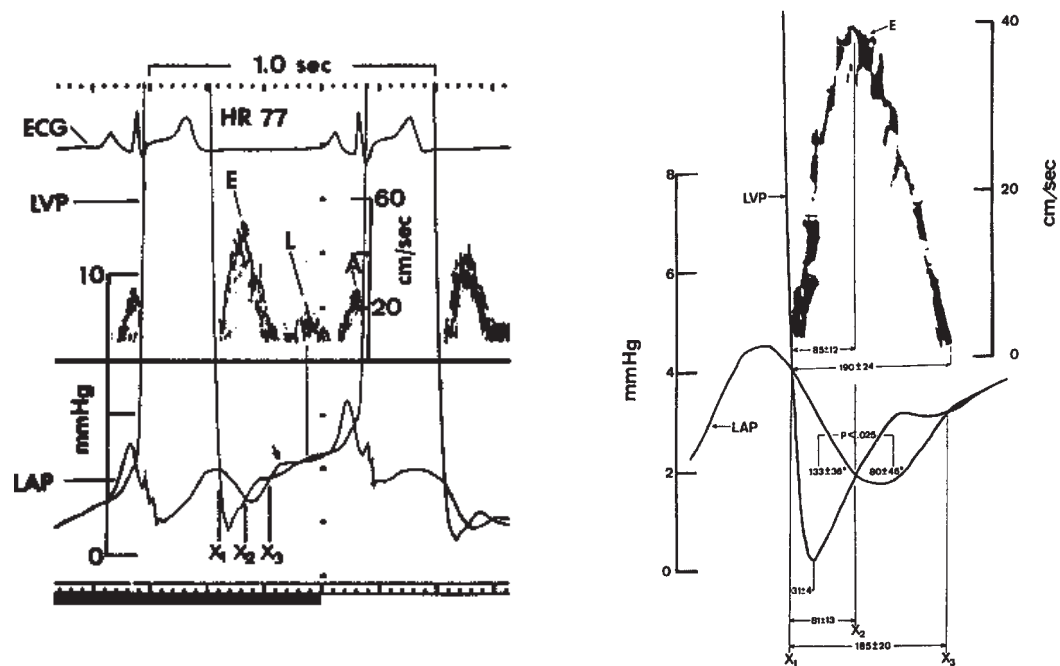
2.2.3c Diastolische functie en dysfunctie van de linkerventrikel

De normale vulling van de linkerventrikel gedurende de diastole wordt gekenmerkt door een standaard instroompatroon, bestaande uit twee golven. Dit wordt getoond in figuur 2.9 waar de bloedsnelheid ter plaatse van de mitraalklep wordt uitgezet in functie van de tijd. De meting van de bloedsnelheid gebeurt met gepulste Dopplerechocardiografie. Men is met deze techniek in staat om bloedsnelheden te meten op willekeurige plaatsen in het organisme (bv. hart en slagaders). De grootte van de snelheid die wordt gemeten is deze van de projectie van de snelheidsvector in de richting van de scanlijn van het echotoestel.

Een eerste golf verschijnt tijdens de snelle vullingsfase. Deze golf wordt de E-golf genoemd (Early wave - vroege vullingsgolf). Bij het openen van de mitraalklep zorgt het heersende drukverschil tussen atrium en ventrikel voor een stroming van het bloed van atrium naar ventrikel. Figuur 2.10 toont dat de oplopende flank van de E-golf overeenstemt met een positieve drukgradiënt tussen atrium en ventrikel (periode X1-X2). De dalende flank van de E-golf stemt overeen met een negatieve drukgradiënt (periode X2-X3). Het maximum van de E-golf stemt overeen met een nul drukgradiënt (X2). Na de vroege vullingsgolf is er een periode van diastase waarbij er nagenoeg geen drukverschil is tussen atrium en ventrikel. Er treden dan ook maar kleine stroomsnelheden op. Bij lage hartritmes wordt er een L-golf opgemerkt (zie figuur 2.10).



Figuur 2.9: Snelheidspatroon van de stroming doorheen de mitraalklep, boven : vierkamerzicht met meetvolume ter hoogte van de mitraalklep, midden : electrocardiogram, onder : snelheidspatroon.



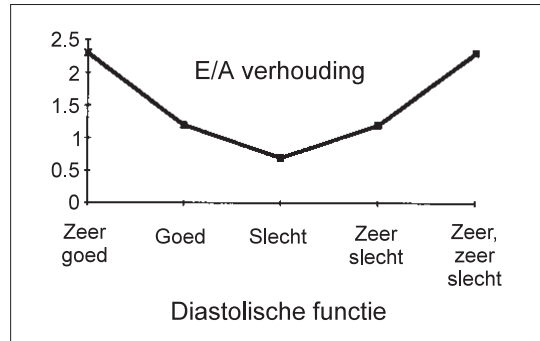
Figuur 2.10: Optreden van de E- en A-golf gaan gepaard met drukverschillen tussen atrium en ventrikel, LAP : linkeratriale druk, LVP : linkerventriculaire druk, HR : hartritme, ECG : elektrocardiogram [19].

Tenslotte is er de atriale contractie waardoor er opnieuw een vullingsgolf ontstaat (A-golf). Ook hier komt een positieve drukgradiënt overeen met de oplopende flank van de A-golf. De dalende flank van de A-golf stemt overeen met een negatieve drukgradiënt tussen atrium en ventrikel. Een deel van deze negatieve drukgradiënt is te wijten aan de beginnende contractiefase van de ventrikel. De overeenstemming van deze oplopende en dalende flanken met atrio-ventriculaire drukgradiënten waarbij de faseverschuiving tussen beide signalen ongeveer 90° bedraagt wijst erop dat de transmitraalstroming in een normale situatie gedomineerd wordt door inertiekrachten [137, 49].

Het falen van de linkerventriculaire diastolische functie is de onmogelijkheid van het hart om efficiënt en adequaat met bloed gevuld te raken onder een aanvaardbare druk. De inefficiënte vulling van het hart met stijging van de vullingsdrukken geeft aanleiding tot kortademigheid en is dikwijls het eerste symptoom bij tal van hartafwijkingen. Een vroegtijdig detecteren van de diastolische dysfunctie laat dus toe om vroegtijdig cardiale aandoeningen op te sporen. Figuur 2.8 toont de wijziging in het druk-volumeverband bij diastolische dysfunctie. Ter informatie wordt er in dezelfde figuur ook getoond hoe het druk-volumeverband wijzigt bij systolische dysfunctie.

Tijdens hartcatheterisatie wordt een katheter ingebracht in de hartkamers en worden in situ drukken opgetekend. Uit deze invasief gemeten drukken worden parameters afgeleid om de diastolische linkerventrikelfunctie te evalueren. Om de risico's en ongemakken van deze invasieve drukmetingen bij o.a. preventieve onderzoeken te vermijden, heeft men gezocht naar evenwaardige niet-invasieve methodes. De studie met Dopplerechocardiografie van de vullingspatronen van de linkerventrikel is een frequent toegepaste techniek. Tot nu toe worden om diastolische (dys)functie te evalueren de mitraalstroming en de longvenenstroming bestudeerd. Transmitraal Dopplerechocardiografie laat toe de diastolische vullingssnelheden te bepalen en bijgevolg onrechtstreeks het atrio-ventriculair drukverschil te karakteriseren. Uit de mitraalstroming kunnen volgende karakteristieke parameters worden afgeleid : maximale snelheden gedurende de E- en A-golf, de verhouding van beide snelheden (E/A-verhouding) en de acceleratie- en deceleratietijd van de E-golf geëxtrapoleerd tot de basislijn.

Het bestuderen van de transmitraalstroming alleen ter karakterisatie van de diastolische dysfunctie is echter omstreden omdat ze geen sluitende informatie geeft over de diastolische functie. Dit wordt heel duidelijk geïllustreerd in figuur 2.11 waar de E/A-verhouding is uitgezet tegenover de diastolische functie. De U-vorm van de curve geeft aan dat men voor zowel zeer goede als zeer slechte diastolische functie eenzelfde E/A-verhouding meet. Dit is een gevolg van het feit dat bij veroudering en diastolische dysfunctie het snelheidspatroon evolueert naar een 'pseudo-normale' vorm : het Dopplerpatroon bij ernstige diastolische dysfunctie neemt dezelfde vorm aan als bij zeer goede diastolische functie.



Figuur 2.11: Verloop van de E/A-verhouding in functie van de diastolische (dys)functie [90].

Meer recent hebben verschillende onderzoekers [10, 30, 124, 123, 122, 121, 120] de kleuren Doppler M-mode echocardiografie geïntroduceerd als een veelbelovende techniek voor de bijkomende evaluatie van de linkerventrikelvulling. Ook in dit werk wordt een bijdrage in die richting geleverd. Daarom wordt de discussie rond de kleuren Doppler M-mode uitgesteld tot bij de bespreking van de resultaten in hoofdstuk 9.

Hoofdstuk 3

Intraventriculaire drukgradiënten in het linkerhart

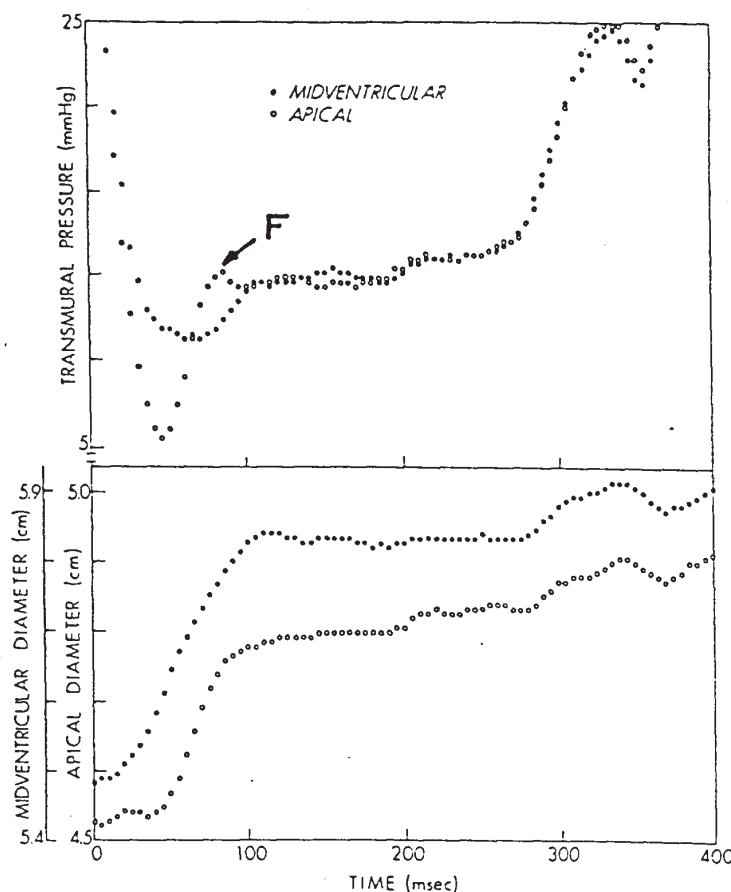
3.1 Inleiding

Het meten van de drukken in de hartkamers is een belangrijk hulpmiddel voor klinici, niet alleen bij het stellen van de juiste diagnose maar eveneens bij het bepalen van de meest geschikte therapie. Recent onderzoek staft de overtuiging dat lokale, intraventriculaire drukgradiënten eveneens een belangrijke rol vervullen bij het analyseren van de diastolische functie en vulling. Een verder onderzoek van deze drukgradiënten, ondersteund door het ontwikkelen van theorieën en mathematische modellen, kan in belangrijke mate bijdragen tot het begrijpen van de diastolische (dys)functie. In wat volgt zal de aandacht beperkt worden tot de linkerharthelft.

3.2 Lokale drukgradiënten in de linkerventrikel

Reeds in 1979 stelden Ling et al. plaatselijke drukverschillen vast tijdens de vulling van de linkerventrikel van honden [69]. Bij het meten van drukken ter hoogte van de apex en ter hoogte van het midden van de ventrikel werden verschillen van 2 tot 5 mmHg geregistreerd (figuur 3.1).

Het drukverloop ter hoogte van de apex (open cirkels) vertoont hierbij een steile daling tijdens de vroege diastole (snelle vullingsfase), gevolgd door een steile druktoename, gevolgd door de kenmerkende oscillerende F-golf.

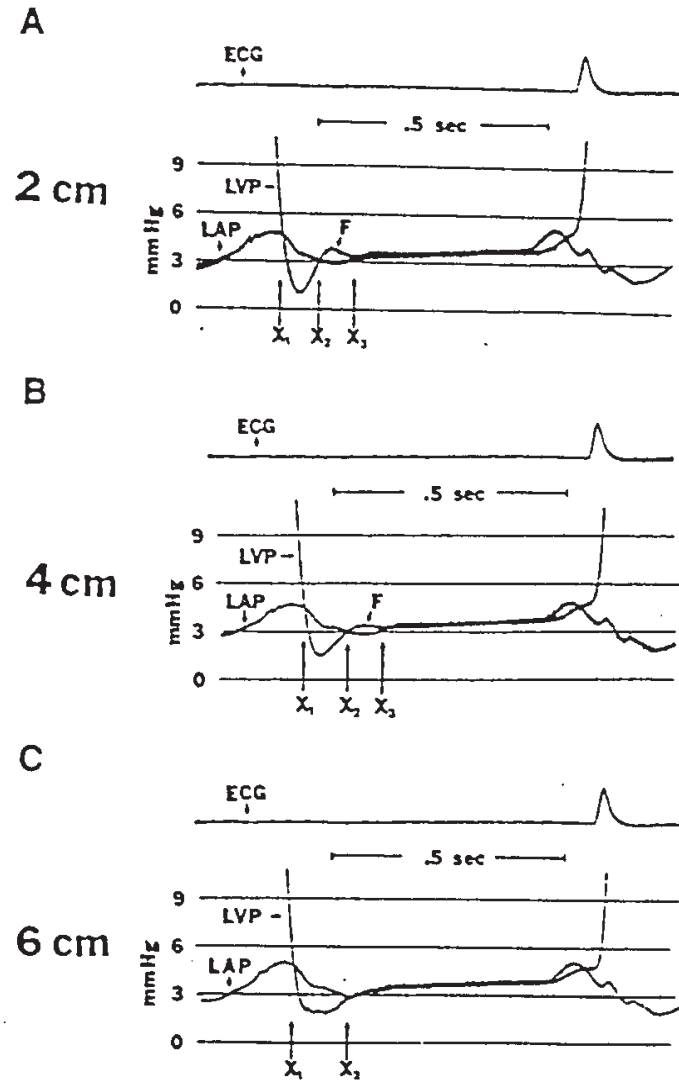


Figuur 3.1: Dynamisch druk- en diameterverloop tijdens de diastole in de linkerventrikel : apicaal en midventriculair.

Op het midventriculaire niveau (gevulde cirkels) ziet het drukverloop er anders uit. Het wordt gekenmerkt door een veel minder uitgesproken daling, waarbij bovendien de minimale druk later optreedt dan op het apicale niveau. Vervolgens stijgt de druk geleidelijk en toont slechts een sterk gedempt oscillerend gedrag.

Tijdens de late diastole constateerden Ling et al. [69] daarentegen een omkering van de drukgradiënt. Hierbij was de apicale druk 2 tot 3 mmHg hoger dan de midventriculaire druk (figuur 3.1). Deze omkering van de intraventriculaire drukgradiënt zou volgens Ling et al. verband houden met de vertraging van de snelle diastolische instroming. De juistheid van deze veronderstelling wordt onder meer gestaafd door de vaststelling door Van de Werf et al. [135] dat een omkering van de transmitrale drukgradiënt geassocieerd kan worden met de vertraging van de vroege diastolische instroming in de linkerventrikel. Aangezien het bloed, alvorens geëjecteerd te worden, bijna volledig tot stilstand komt, is voor deze vertraging een vergelijkbare kracht nodig als voor de initiële versnelling tijdens de vroege diastolische vulling. De waarneming van omgekeerde drukgradiënten is dus zonder meer fysiologisch te verklaren op basis van inertie.

Courtois et al. bestudeerden deze fenomenen gedetailleerd door apicale, midventriculaire en basale drukken in de linkerventrikel te vergelijken met de druk in het linkeratrium [19]. Op die manier wordt het verband tussen de transmitrale drukgradiënt en de lokaal gemeten linkerventrikeldrukken in kaart gebracht (figuur 3.2).



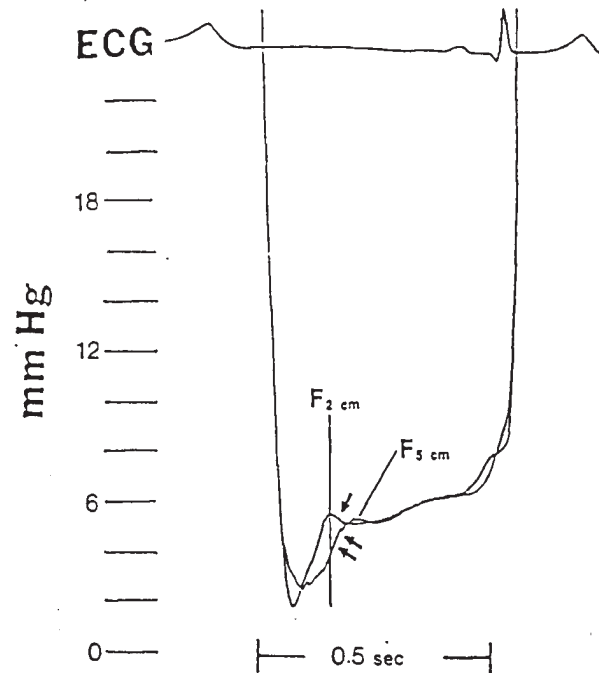
Figuur 3.2: Transmitrale druk gemeten op 2,4 en 6 cm van de apex, LVP = linkerventrikeldruk, LAP = linkeratrium druk.

Naargelang het meetpunt meer en meer van de apex naar de basis verschoven wordt, treden een aantal lokale verschillen in het drukverloop op :

1. de minimum diastolische druk en de tijd nodig om deze te bereiken, nemen toe.
2. de maximale transmitrale drukgradiënt daalt.
3. de helling en de hoogte van de snelle vullingsdruk golf in de linkerventrikel nemen af.
4. het tijdstip waarop de atriale en ventriculaire druk elkaar voor de tweede keer kruisen, treedt later op.
5. de grootte van de omgekeerde drukgradiënt neemt af.

Volgens Courtois et al. moet men op basis van recente studies de oorzaak van deze lokale drukgradiënten zoeken in de richting van een mechanisme waarbij de linkerventrikel bijdraagt tot de vroegdiastolische vulling door middel van een aanzuigend effect. De gemeten drukgradiënten zouden verklaard kunnen worden door het optreden van een 'recoil' (terugslag) van de ventriculaire wand. Deze terugslag is het gevolg van het opslaan van elastische energie tijdens de systole. Het oscilleren van de apicale druk zou veroorzaakt worden door het oscilleren van de apex zelf [19]. Omdat de ventriculaire drukstijging, na het bereiken van een minimum, eerst optreedt ter hoogte van de apex, en laatst ter hoogte van de basis, kan hieruit besloten worden dat vertraging van het bloed door impact met de ventrikelwand, eerst plaats heeft nabij de apex, en pas daarna bij de basis. Uit de timing van de piek van de apicale F-golf (figuur 3.3) kan men bovendien besluiten dat de vulling zich eerst voltooit in de apex. Aangezien de basale druk op dat moment nog steeds toeneemt, is de vulling daar nog steeds gaande. Dit wordt eveneens bevestigd door de vaststelling door Ling et al. [69] dat de apicale diameter veel sneller toeneemt en de diastase eerder bereikt in vergelijking met de midventriculaire diameter (figuur 3.1 - onderste grafiek).

De vaststelling dat de apicale zone zich eerst vult lijkt in overeenstemming met een model waarbij de apex beschouwd wordt als een bron van elastische 'recoil' gedurende de vroege diastole. Aldus draagt de apex in belangrijke mate bij aan het vullingsproces door actief bloed vanuit de basale en midventriculaire zone naar de apicale zone te zuigen. De lichte daling van de apicale druk na de piek van de F-golf zou er daarenboven kunnen op wijzen dat gedurende de snelle vullingsfase de apex een zekere overvulling ondergaat. Hiermee bedoelt men dat een extra hoeveelheid bloed in het apicale gedeelte van de ventrikel stroomt. Deze extra hoeveelheid bloed zorgt ervoor dat de ventrikelwand ter hoogte van de apex verder wordt uitgerekt. Eenmaal de vulling ter hoogte van de apex voltooid, stroomt dit extra beetje bloed terug naar de basale en midventriculaire zone. Volgens Courtois et al. [21] zou de elastische 'recoil' van de apex voldoende inertie aan het bloed kunnen overdragen om deze overvulling te bewerkstelligen. Contrast ventriculografie van linkerventrikels, zowel bij honden als



Figuur 3.3: Lokale linkerventrikeldrukken, gelijktijdig gemeten met een tweevoudige micromanometer met 3 cm tussen de sensoren.

bij mensen, bevestigt deze overvulling (bij hartfrequenties die een duidelijke diastatische fase vertonen).

Bij het bestuderen van de late diastole constateerden Courtois et al. [19] dat de drukgolf in de linkerventrikel tengevolge van de atriale contractie eveneens afhankelijk is van de positie waar de meting verricht wordt. De aanvankelijke stijging van de linkerventriculaire A-golf wordt het eerst waargenomen in de nabijheid van de basis en laatst nabij de apex (figuur 3.3). Deze vaststelling stemt volledig overeen met een model van passieve ventrikelvulling. Het feit dat de druktoename tengevolge van impact van het bloed, dat de ventrikel binnenstroomt, eerst ter hoogte van de basis optreedt en pas daarna ter hoogte van de apex, is te verwachten, aangezien de drukgolf een bepaalde tijd nodig heeft om zich van basis naar apex voort te planten. Er werd, voor de stijging van de linkerventriculaire A-golf, een gemiddelde vertraging van 20 ms vastgesteld. Wanneer men aanneemt dat de drukgolf tijdens dit interval een afstand van 4 cm aflegt, komt dit overeen met een gemiddelde voortplantingssnelheid van 2 m/s [19].

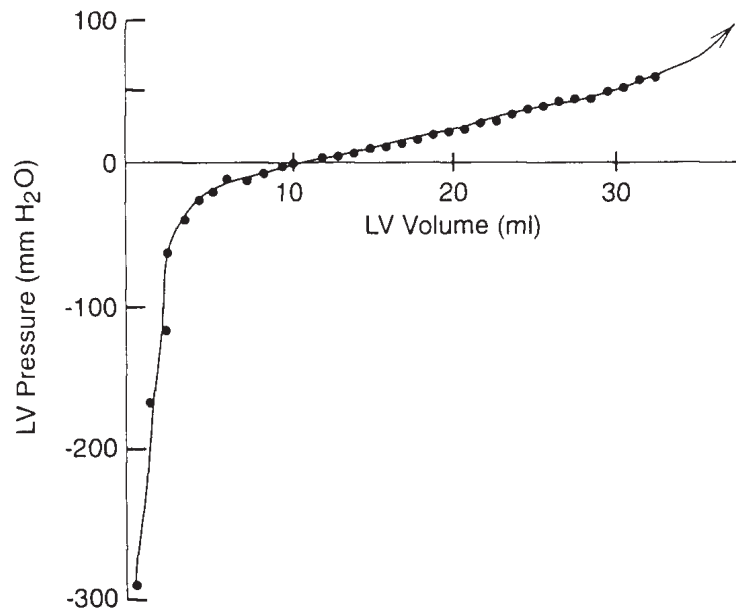
Uit dit alles kan men besluiten dat gedurende de vroege diastole de vulling niet passief gebeurt, maar de ventrikel via een actief mechanisme aan het proces deelneemt. Verder onderzoek moet uitwijzen hoe dit precies gebeurt. Tijdens de late diastole, gepaard gaande met de atriale systole, lijken de gegevens daarentegen in de richting van een passieve vulling te wijzen (vanuit ventriculair standpunt).

3.3 Invloed van de systolische functie

3.3.1 Verkorting van het myocardium

Tot voor kort werd de vulling van de linkerventrikel tijdens de vroege diastole vooral benaderd vanuit het standpunt van de wet van Starling. De ventrikel zet volgens deze wet gedurende de vroege diastole uit tengevolge van de veneuze druk. Als gevolg hiervan zou de vulling voornamelijk bepaald worden door de atriale druk en de graad van ventriculaire relaxatie.

Zoals in de vorige paragraaf uiteengezet, wordt recent meer en meer verondersteld dat ook de ventriculaire systole een belangrijke invloed heeft op de daaropvolgende vroegdiastolische vulling : de ventrikel oefent een zuigend effect uit op het bloed [152]. De grootte van dit effect wordt mede bepaald door de mate waarin het eind-systolisch volume (ESV) beneden het evenwichtsvolume van de linkerventrikel ligt. Het evenwichtsvolume verwijst hierbij naar het eind-systolisch volume waarbij geen transmurale druk aanwezig is (figuur 3.4 [8]). Er wordt dan in de ventrikelwand geen elastische energie opgeslagen en de vulling gebeurt dus zuiver passief. Vroegdiastolische functie is dus sterk verbonden met de verkorting van het myocardium [21]. De verkorting van het myocardium wordt op zijn beurt bepaald door de contractiliteit van de linkerventrikel en de nabelasting.



Figuur 3.4: Druk-volume verband met evenwichtsvolume bij nul transmurale druk.

Courtois et al. onderzochten in welke mate deze factoren (contractiliteit van de linkerventrikel, nabelasting, atriale druk en relaxatiesnelheid) bijdragen aan de bepaling van de vroegdiastolische transmitrale drukgradiënt [23]. Uit deze studie blijkt dat de verkorting van het myocardium (en dus het eind-systolisch volume) een belangrijke determinant is voor de transmitrale drukgradiënt en de vroegdiastolische vullingssnelheid.

3.4 Atrio-ventriculaire drukgradiënten

Het is reeds geruime tijd bekend dat de maximale vroegdiastolische stroomsnelheid doorheen de mitraalklep sterk gecorreleerd is met de grootte van de vroegdiastolische atrio-ventriculaire drukgradiënt.

Courtois et al. vergeleken een aantal verschillende transmitrale en intraventriculaire drukgradiënten, en gingen de correlatie na met de maximale vroegdiastolische vullingssnelheid [22].

Hieruit bleek dat het verband tussen de maximale stroomsnelheid en de transmitrale drukgradiënt in belangrijke mate beïnvloed wordt door de plaats waar en het tijdstip waarop de verschillende drukken gemeten worden. Vooral de transmitrale drukgradiënten tussen X1 (zie figuur 3.2) en de minimale linkerventrikeldrukken lijken een maat voor de totale linkeratrium- en linkerventrikelenergie beschikbaar voor vroegdiastolische vulling en correleren bijgevolg goed met de maximale stroomsnelheid gedurende de vroege vullingsgolf.

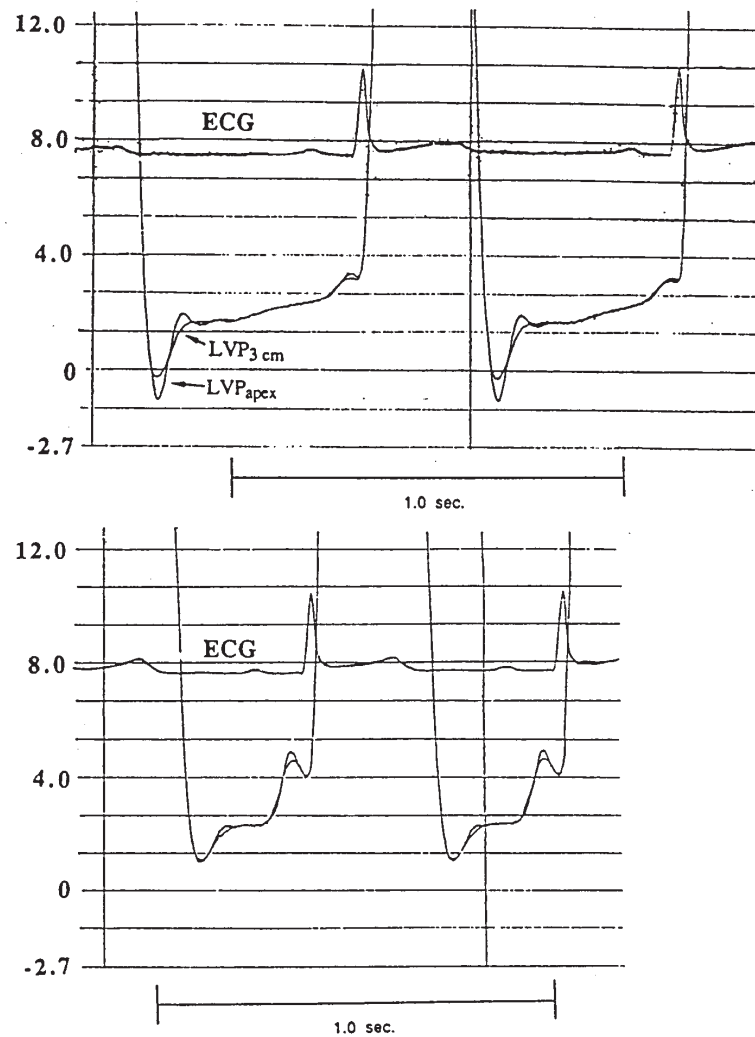
Naast positie en tijdstip van de drukmetingen, kunnen ook andere factoren een invloed hebben op de gemeten intraventriculaire drukgradiënten, zoals inhomogeniteitseffecten, ademhaling en intra-atriale drukgradiënten.

3.5 Systolische dysfunctie

Indien men veronderstelt dat de intraventriculaire drukgradiënten, gemeten tijdens de vroege diastole, het gevolg zijn van een elastische 'recoil' van de ventriculaire wand, zouden omstandigheden, waarbij de plaatselijke contracties verstoord worden, eveneens deze lokale drukgradiënten moeten wijzigen.

Uit een onderzoek van Courtois et al. [20] blijkt duidelijk dat systolische dysfunctie, teweeggebracht door myocardiale ischemie, leidt tot een verzwakking, verlies of zelfs omkering van de maximale intraventriculaire drukgradiënt tijdens de snelle

vullingsfase (zie figuur 3.5). Deze veranderingen zijn waarschijnlijk te wijten aan een verlies aan actief samentrekkend myocardium, dat niet langer in staat is elastische energie op te slaan.



Figuur 3.5: Intraventriculaire drukgradiënten

Bovenste figuur : onder normale omstandigheden

Onderste figuur : na occlusie van de linkerkransslagader

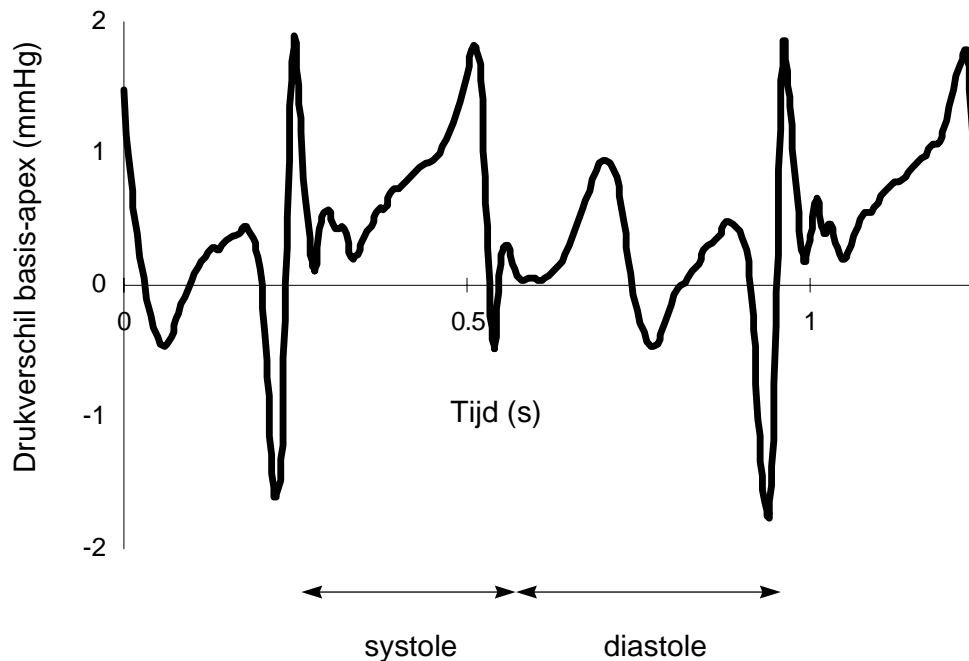
De ejectiefractie daalt van 46 % naar 29 % en de intraventriculaire drukgradiënt keert om (apicale druk 0.1 mmHg hoger dan op 3 cm van de apex).

3.6 De isovolumetrische relaxatie

Tot nog toe bleef het onderzoek in verband met de isovolumetrische relaxatie hoofdzakelijk beperkt tot het zoeken van een geschikte tijdsconstante die de relaxatie kan modelleren. Intraventriculaire drukgradiënten werden hierbij zeer weinig tot niet in rekening gebracht.

Nochtans werden reeds verschillende malen veranderingen in ventrikelvorm waargenomen tijdens de isovolumetrische relaxatie. Deze vormveranderingen blijken bovendien vaak het gevolg te zijn van bloedstroming van de ene regio in de ventrikel naar een andere. Intraventriculaire drukgradiënten tengevolge van asynchrone relaxatie en/of elastische 'recoil', kunnen hiervan aan de basis liggen.

Figuur 3.6 toont opgemeten drukverschillen tussen basis en apex tijdens de systole en diastole in een hondenhart. Hier zijn de drukverschillen tijdens de isovolumetrische relaxatie klein ten opzichte van deze tijdens de vullingsfase of ejectiefase.



Figuur 3.6: Drukverschil gemeten tussen basis en apex tijdens de systole en diastole in een hondenhart. Bij het begin van de diastole, gedurende de isovolumetrische relaxatie, zijn de drukverschillen klein in vergelijking met de drukverschillen die optreden tijdens de vullingsfase of ejectiefase. Met dank aan P. Vandervoort (MD), Hartcentrum Limburg, Genk.

3.7 Besluit

Intraventriculaire drukgradiënten spelen zonder twijfel een belangrijke rol bij het analyseren van de diastolische functie.

Bovenal dient hierbij een onderscheid gemaakt te worden tussen de vroege snelle vullingsfase en de late diastole geassocieerd met de atriale systole. Tijdens de vroege diastole wijst alles erop dat de ventrikel op actieve manier aan de vulling meewerkt, waarschijnlijk door het uitoefenen van een zuigend effect. Tijdens de late diastole daarentegen treedt vanuit ventriculair standpunt een volledig passieve vulling op.

Ook de invloed van de isovolumetrische relaxatie op de aanwezigheid van intraventriculaire drukgradiënten kan belangrijk zijn [89].

Hoofdstuk 4

Numerieke modellen met bewegende geometrie

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de verschillende soorten numerieke modellen die worden gebruikt om de stroming in de hartkamers te simuleren. Deze modellen kunnen op verschillende manieren worden ingedeeld, naargelang de volgende criteria :

- Methode voor de beweging van de wand.
- Complexiteit van het model voor de hartspierwand.
- Methode voor de stromingsberekening.

4.1.1 Indeling volgens de beweging van de wand

Er bestaan twee belangrijke categorieën. In de eerste categorie worden de methodes gevonden waarbij de beweging van de ventriculaire wand wordt voorgeschreven. Deze beweging van de wand kan bepaald worden aan de hand van een voorschreven bewegingswet. Meestal is men geïnteresseerd in de karakteristieke kinematische grootheden in de ventrikel. De geometrieën die in dit geval gebruikt worden, zijn dikwijls vereenvoudigd omdat men in het algemeen de fenomenen wil onderzoeken die zich voordoen bij een stroming in een caviteit. Wanneer men wil rekenen met een meer realistische wandbeschrijving, kan de beweging van de wand ook opgelegd worden uitgaande van

in vivo metingen. In het geval van de voorgeschreven bewegingswet voor de wandbeweging wordt enkel de invloed van de structuur (wand) op het fluïdum (bloed) in rekening gebracht.

In de tweede categorie bevinden zich de methodes die ook de invloed van het fluïdum op de wand in rekening brengen. Men spreekt dan van vloeistof-wand interactie modellen aangezien de verplaatsing van de wand afhangt van de beweging van het fluïdum en omgekeerd. Het is deze methode die in dit werk wordt gebruikt.

4.1.2 Indeling volgens de complexiteit van het model voor de hartspierwand

De complexiteit van de hartspierwand kan gemodelleerd worden op een eenvoudige manier (b.v. als een dunne schaal), maar er kan ook rekening gehouden worden met de ligging van de vezels en de variatie van de spanningen over de dikte van de hartspierwand. In dit laatste geval zal men dan meestal gebruik maken van een eindig elementenmodel voor de hartspierwand.

De nadruk in dit werk ligt vooral op de stromingseigenschappen aangezien deze in vivo kunnen gemeten worden met niet-invasieve technieken. Het is dan niet nodig om de spanningsverdeling in de hartspierwand te kennen. Enkel de radiale spanning ter hoogte van het endocard is belangrijk aangezien deze overeenstemt met de druk die op die plaats in het bloed heerst. Daarom wordt voor een eenvoudig model gekozen dat de hartspierwand beschrijft. In dit werk wordt het model zodanig geijkt dat een fysiologisch druk-volume verband wordt bekomen (zie hoofdstuk 6).

4.1.3 Indeling volgens de gebruikte methode voor de stromingsberekening

Aangezien in dit werk de meeste aandacht wordt besteed aan de stromingsresultaten zal de indeling volgens de gebruikte stromingsberekening worden geïllustreerd met enkele voorbeelden. Bij deze voorbeelden zal dan vermeld worden of er met een voorgeschreven bewegingswet voor de hartspierwand wordt gewerkt of een vloeistof-wand interactie model wordt gebruikt.

Er bestaan drie categorieën. In de eerste categorie vallen de potentiaalmethodes en de daarop gebaseerde vortexmethodes. Deze methodes stammen voort uit de periode dat de rekenkracht van de computers veel minder was dan nu het geval is. Deze methodes raken meer en meer in onbruik omdat men met de huidige computerkracht meer en meer in staat is om de volledige Navier-Stokes-vergelijkingen op te lossen.

De tweede categorie omvat de methodes waarbij de stroming wordt berekend op een stilstaand rooster met een Euleriaanse methode. De beweging van de hartspierwand wordt berekend met een Lagrangiaanse methode. De beweging van het fluïdum kan in rekening worden gebracht voor de berekening van de positie van de hartspierwand. Wanneer de positie van de wand gekend is, moeten de krachten die de wand op het fluïdum uitoefent, worden geïnterpoleerd naar het stilstaande rooster. Voor de stromingsberekening worden deze krachten als externe krachten behandeld. Deze methode wordt ook de methode met de ondergedompelde randen ('immersed boundaries') genoemd. Dit model werd ontwikkeld door Peskin [97, 98] die als eerste in 1972 de stroming doorheen de natuurlijke mitraalklep bestudeerde met een vloeistof-wand interactie model.

De derde categorie omvat de methodes waarbij het rooster voor de stromingsberekening meebeweegt met de hartspierwand. De buitenrand van het rooster valt dan samen met de positie van de hartspierwand. De beweging van de hartspierwand gebeurt ook hier met een Lagrangiaanse methode. Voor de stromingsberekening dient men de arbitraire Lagrangiaanse-Euleriaanse (ALE) methode te gebruiken die bekomen wordt door de behoudswetten uit de drukken op bewegende roosters. Deze ALE methode is in nog bijna geen enkel commerciële softwarepakket beschikbaar. De meeste onderzoekers passen daarom de Euleriaanse methode van de vorige categorie toe op deze bewegende roosters, met als argument dat dit mogelijk moet zijn indien de verplaatsingen van het rooster voldoende klein zijn. Er wordt dan met een kleine tijdstap gerekend. In de ALE methode is echter niet de verplaatsing van het rooster maar de snelheid waarmee het rooster zich verplaatst belangrijk. Deze snelheid wordt bekomen uit de verhouding van de roosterverplaatsing en de tijdstap en is dus onafhankelijk van de grootte van de tijdstap. De fout die aanwezig is door het gebruik van de Euleriaanse methode in plaats van de ALE methode is aldus een consistentiefout en geen discretisatiefout die kan weggewerkt worden door het nemen van een kleinere tijdstap. Door gebruik te maken van interpolatiemethodes zou men toch de Euleriaanse methode kunnen gebruiken. Men moet immers voor deze methode de tijdsafgeleide $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ berekenen. Deze afgeleide wordt berekend als volgt

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \frac{\underline{v}^{n+1} - \underline{v}^n}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Hierbij dienen de snelheden \underline{v}^n en \underline{v}^{n+1} op dezelfde positie berekend te worden. De roosterknopen op tijdstip $n+1$ liggen echter niet meer op dezelfde positie als op tijdstip n . Door interpolatie dient men dan \underline{v}^n te bereken. Deze interpolatie is relatief eenvoudig wanneer de rand in de richting van het fluïdum beweegt. Wanneer de rand echter van het fluïdum weg beweegt moet er op één of andere manier geëxtrapoleerd worden voor deze randknopen. De commerciële pakketten voeren deze interpolatieprocedures niet automatisch uit. Meestel dienen deze uitwendig bijgeprogrammeerd te worden. De gebruikers van deze pakketten maken echter nooit gewag van dit pro-

bleem. Toch is het zo dat wanneer blindelings een pakket wordt gebruikt waarin geen ALE methode voorhanden is, er een consistentiefout wordt gemaakt bij de berekening van de stroming. Deze fout is niet te merken in de continuïteitsvergelijking. Er wordt dus wel aan massabehoud voldaan. Nu is het zo dat er vaak enkel op massabehoud wordt gecontroleerd. In dat geval zal men besluiten dat de methode goed werkt. De consistentiefout doet zich enkel voor in de impulsvergelijkingen. De foutief berekende acceleratiekrachten zijn er dan verantwoordelijk voor dat het drukveld foutief wordt berekend. Het snelheidsveld kan dan echter ook niet juist berekend zijn (alhoewel aan massabehoud wordt voldaan).

Als besluit kan gesteld worden dat wanneer met bewegende roosters wordt gerekend, de ALE methode het meest geschikt is om de stromingsberekening te doen. Het is dan ook deze methode die in dit werk gebruikt is. In dit werk is geen gebruik gemaakt van commerciële software zodat er een volledige controle is over de implementatie van de methode.

4.2 Indeling volgens stromingsmethodes

4.2.1 Potentiaal- en wervelmethodes

4.2.1a Model van Pedley

Pedley [95] gebruikt een potentiaalmethode waarbij de oplossing gezocht wordt met analytische functies. Om de potentiaalmethode te kunnen gebruiken wordt er verondersteld dat er geen rotatie aanwezig is in de stroming

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{c} = 0. \quad (4.2)$$

Daardoor kan het snelheidsveld afgeleid worden van een potentiaalfunctie ϕ

$$\underline{c} = \nabla \phi. \quad (4.3)$$

Aangezien de stroming incompressibel is ($\nabla \cdot \underline{c} = 0$) komt er

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = 0. \quad (4.4)$$

De potentiaalfunctie is dus een oplossing van de vergelijking van Laplace. Pedley bepaalde de oplossing voor een sfeervormige geometrie. Dit gebeurde analytisch door

ϕ uit de drukken in termen van Legendre polynomen. De beweging van de wand werd voorgeschreven.

4.2.1b Model van Cassot

Cassot [12] veronderstelt ook een potentiaalstroming. Hij kiest om de vergelijking van Laplace op te lossen met de methode van de randintegraalvergelijking (BIEM : Boundary Integral Equation Method) [112]. Door gebruik te maken van de identiteit van Green in een domein Ω met rand S (u en w zijn scalaire velden in Ω)

$$\int_{\Omega} (w \Delta u - u \Delta w) d\Omega = - \int_S (w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n}) dS, \quad (4.5)$$

waarbij u gesubstitueerd wordt door de potentiaal ϕ en w door de functie van Green voor de vergelijking van Laplace

$$G(\underline{\xi}, \underline{x}) = \frac{-1}{4\pi|\underline{x} - \underline{\xi}|} \quad \text{of} \quad G(\underline{\xi}, \underline{x}) = \frac{-1}{2\pi} \ln |\underline{x} - \underline{\xi}|, \quad (4.6)$$

in respectievelijk drie of twee dimensies, geldt er dat

$$\phi(\underline{x}) = \int_S (\frac{\partial \phi}{\partial n} G - \phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS. \quad (4.7)$$

Hierbij is \underline{x} een punt in Ω en $\underline{\xi}$ een punt op S . \underline{n} is de normaal in $\underline{\xi}$ wijzend naar Ω . Dezelfde redenering kan gevolgd worden voor de berekening van de potentiaal ϕ' in $\Omega' = R^3 \setminus \Omega$ of $R^2 \setminus \Omega$. In de veronderstelling dat

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi'}{\partial n} = 0, \quad \phi - \phi' = -\mu(\underline{\xi}) \quad (4.8)$$

wordt de algemene uitdrukking voor de potentiaal ϕ en zijn gradiënt $\nabla \phi$ in Ω

$$\phi(\underline{x}) = \int_S \mu \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (4.9)$$

$$\nabla \phi(\underline{x}) = \int_S \mu \nabla \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.10)$$

De uitdrukking voor de potentiaal in elk punt van Ω wordt op deze wijze herleidt naar de berekening van een randintegraal. $\mu(\underline{\xi})$ is een verdeling van dipolen op de rand. Door uit te drukken dat op de rand

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \underline{V}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}, \quad (4.11)$$

met $\underline{V}(\underline{\xi})$ de snelheid in een punt op de ventrikelwand, kan men de verdeling van μ op de rand berekenen. Dit gebeurt door de rand onder te verdelen in een eindig aantal segmenten S_i , waarbij μ_i in elk segment moet bepaald worden uit het stelsel bekomen door vgl. (4.11) uit te drukken voor elk segment. De beweging van de ventrikelwand wordt voorgeschreven.

Dit model laat niet toe om wervelstructuren in de oplossing te bekomen. Daarom wordt enkel de ejectiefase gesimuleerd, waarbij verondersteld wordt dat de initiële toestand wervelvrij is. In de praktijk is dit niet zo, maar toch slaagde Cassot erin om een goede overeenkomst te vinden voor de drukverdeling langsheen de apex-aorta lijn in een 2D model.

Tijdens de vullingsfase komen grote wervels voor. Om ook de vullingsfase te kunnen simuleren dient het model uitgebreid te worden.

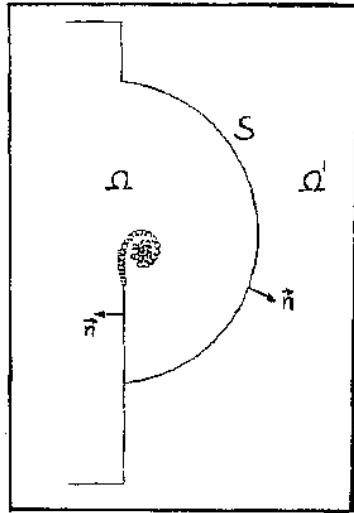
4.2.1c Model van Morvan

Het numeriek model van Morvan [86] simuleert de volledige hartcyclus in een axisymmetrische geometrie. Het model is een uitbreiding van dat van Cassot in die zin dat nu wel wervelstructuren in de oplossing kunnen voorkomen. Volgens Morvan gebeurt de voornaamste creatie van wervel aan de tip van de mitraalklep. De wervel wordt afgescheiden en geconvecteerd in de stroming. De positie van de afgescheiden wervels wordt op Lagrangiaanse wijze bepaald. De grootte van de wervel die afgescheiden wordt volgt uit het theorema van Kelvin dat zegt dat de totale circulatie constant blijft in de tijd. Uit positie en grootte van elke wervel volgt een bijdrage in de snelheid in elk punt van het stromingsveld.

De strategie die gevolgd wordt is als volgt :

- Initialisatie van de parameters die de geometrie (figuur 4.1) bepalen. Mitraal- en aortadebiet worden opgelegd in functie van de tijd.
- Iteratieve bepaling van de geometrie uit de volumeverandering in de tijd. De snelheden op de ventrikelwand zijn dus hierdoor gekend op elk tijdstip.

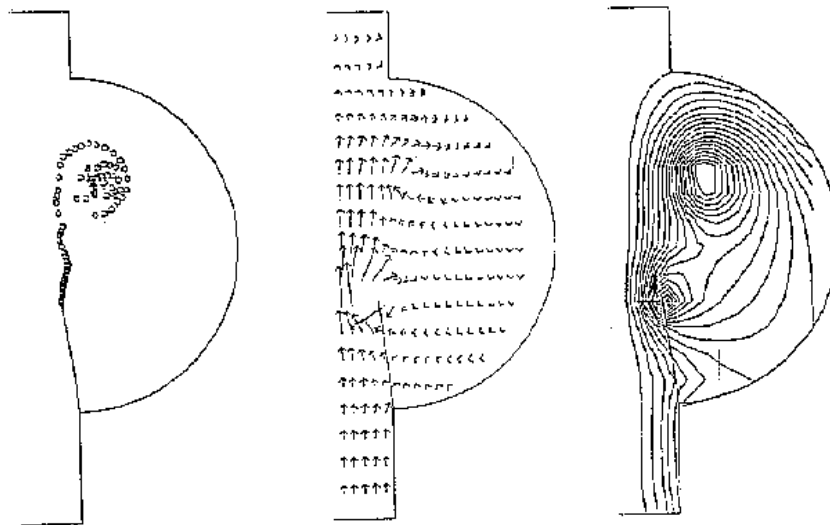
- Verdeling van de geometrie in een eindig aantal segmenten. De verdeling van dipolen over de segmenten en de verdeling van wervels in het veld bepalen het snelheidsveld. De snelheid van elk segment moet overeenstemmen met de gekende snelheid van de ventrikelwand. Dit leidt tot een stelsel van vergelijkingen met als onbekenden de groottes van de dipoolmomenten.
- Met het bekomen snelheidsveld worden de nieuwe posities van de wervels berekend. Uit het behoud van circulatie volgt de grootte van de nieuwe wervel die wordt afgescheiden.



Figuur 4.1: Morvan : geometrie.

Een voorbeeld uit de resultaten van Morvan wordt getoond in figuur 4.2. Hij beweert dat de initiële wervelstructuren die te zien zijn bij het begin van de diastole niet ontstaan door convectieve effecten, maar door het afschudden van de grenslaag van de mitraalklep. Dit viskeus effect komt in zijn model tussen, wanneer de Kutta voorwaarde wordt uitgedrukt. Deze voorwaarde zegt immers dat er aan de tip van de mitraalklep geen omstroming kan bestaan.

Hij stelt dan ook vast dat deze wervelstructuren reeds bestaan alvorens de jet die doorheen de mitraalklep stroomt de apex van de ventrikel bereikt. Dit wordt echter tegengesproken door andere onderzoekers, die beweren dat de vorming van de wervel uitsluitend een convectief fenomeen is, aangezien de tijd waarin de wervelstructuur moet gevormd worden veel te klein is vergeleken met de karakteristieke tijd nodig voor diffusie van wervel [4]. De tijdsconstante τ die deze diffusie karakteriseert is immers $\tau = l^2/\nu$ met l een karakteristieke afstand en ν de kinematische viscositeit. De tijdsconstante die zo berekend wordt voor een afstand van 1 cm en een viscositeit van $3.5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ is 28 s. Gedurende die tijd zijn al heel wat hartslagen voorbij. Deze onderzoekers nemen echter aan dat een convectieve wervel ontstaat door afbuiging van de stroming aan de apex.



Figuur 4.2: Morvan : positie van de wervels (links), snelheidsveld (midden) en stroomlijnen (rechts) bij het begin van sluiting van de mitraalklep.

In dit werk zal getoond worden dat de vorming van de wervel een convectief fenomeen is maar toch ontstaat ter hoogte van de mitraalklep.

4.2.2 Ondergedompelde randen

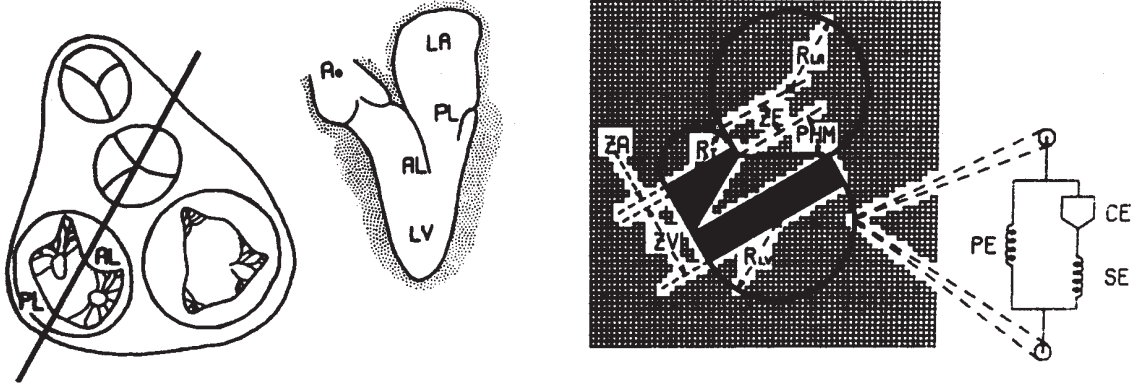
4.2.2a Model van Peskin

Peskin [97, 98, 99, 100, 101, 77, 102] lost de Navier-Stokes-vergelijkingen op in twee of drie dimensies. Het stromingsprobleem wordt gediscretiseerd in een equidistant Cartesisch rooster. De randvoorwaarden zijn periodiek. Het hart is ondergedompeld in het fluïdum en bezit dezelfde soortelijke massa en viscositeit als het fluïdum.

In twee dimensies bestaat de hartwand uit een aaneenschakeling van rechte segmenten, die passief aan trek en/of druk kunnen weerstaan of actief kunnen zijn (b.v. spiercontractie). De lokatie van de segmenten wordt beïnvloed door het stromingsveld. Ter plaatse van de aaneenschakeling van twee segmenten is de resulterende kracht afhankelijk van de hoek tussen de segmenten en de spanning in de segmenten. Deze kracht die op het fluïdum wordt overgedragen komt als externe kracht in de Navier-Stokes-vergelijkingen. Aangezien de lokatie van deze kracht niet overeenstemt met een roosterpunt wordt deze kracht verdeeld naar krachten in de dichtsbijzijnde roosterpunten.

De oplossing van het stromingsveld wordt dus op een Euleriaanse wijze bekomen terwijl de beweging van de wand op Lagrangiaanse wijze wordt opgelost.

Het vlak waarin de berekening gebeurt en het bijhorende computermodel met gesloten aortaklep worden getoond in figuur 4.3.



Figuur 4.3: Peskin : 2D rekenvlak (links), Ao : aorta, LA : linker atrium, LV : linker ventrikel, AL : anterior leaflet (voorste klepblad), PL : posterior leaflet (achterste klepblad) en 2D computermodel (rechts), PE : parallel element, SE : serie element, CE : contractiel element.

In drie dimensies [101, 77] zien de vergelijkingen er als volgt uit :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) + \nabla p = \mu \nabla^2 \underline{u} + F, \quad (4.12)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (4.13)$$

$$F(\underline{x}, t) = \int \underline{f}(q, r, s, t) \partial(\underline{x} - \underline{X}(q, r, s, t)) dq dr ds, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(q, r, s, t) = \underline{u}(\underline{X}(q, r, s, t), t) = \int \underline{u}(\underline{x}, t) \partial(\underline{x} - \underline{X}(q, r, s, t)) d\underline{x}, \quad (4.15)$$

$$\underline{f} = \frac{\partial}{\partial s}(T \underline{\tau}), \quad (4.16)$$

$$T = \sigma \left(\left| \frac{\partial \underline{X}}{\partial s} \right|; q, r, s, t \right), \quad (4.17)$$

$$\underline{\tau} = \frac{\partial \underline{X} / \partial s}{|\partial \underline{X} / \partial s|}. \quad (4.18)$$

Deze vergelijkingen vallen uiteen in drie groepen. Vgl. (4.12)-(4.13) zijn de Navier-Stokes-vergelijkingen voor een viskeus incompressibel fluïdum met soortelijke massa ρ en viscositeit μ . De onafhankelijke variabelen in deze vergelijkingen zijn de positie \underline{x} en de tijd t . De snelheid en de druk zijn gegeven door $\underline{u}(\underline{x}, t)$ en $p(\underline{x}, t)$. De externe krachtdensiteit $F(\underline{x}, t)$ is de kracht per eenheidsvolume overgebracht door de vezels naar het fluïdum waarin ze ondergedompeld zijn.

In vgl. (4.16)-(4.18) zijn de onafhankelijke variabelen de Lagrangiaanse vezelparаметers q, r, s en de tijd t . q, r stelt een vezel voor en s bepaalt een punt van de vezel. $\underline{X}(q, r, s, t)$ is de plaatsvector van het punt s op vezel q, r op tijdstip t . T is de kracht in de vezel en $\underline{\tau}$ is de eenheidsvector rakend aan de vezel. Deze vergelijkingen geven een uitdrukking voor de krachtdensiteit \underline{f} (met betrekking tot q, r, s) in functie van de vezelconfiguratie \underline{X} .

De middelste groep van vergelijkingen, vgl. (4.14)-(4.15), geeft een verband tussen functies van q, r, s en functies van \underline{x} . Vgl. (4.14) verdeelt de krachtdensiteit \underline{f} naar krachtdensiteiten $F(\underline{x}, t)$ in de knooppunten van het Cartesisch rooster. Vgl. (4.15) is de no-slip voorwaarde voor een viskeus fluïdum.

In elke tijdstap wordt het volgende gedaan :

- Voorspel de krachten die op het nieuwe tijdstip op het fluïdum zullen inwerken op een impliciete wijze.
- Verdeel deze krachten naar de dichtsbijzijnde roosterpunten.
- Bereken het nieuwe snelheidsveld met een impliciete methode.
- Interpoleer het snelheidsveld op de randsegmenten en bereken de nieuwe lokatie van de rand.

Hierbij dient opgemerkt te worden dat, door gebruik te maken van een schatting van de krachten op het nieuwe tijdstip, de berekening van het snelheidsveld als het ware volledig impliciet wordt. Hierdoor is de berekeningswijze stabiel.

In de loop van de tijd hebben de implementaties van deze verschillende stappen wijzigingen ondergaan. Het principe is echter steeds hetzelfde gebleven.

Figuur 4.3) toont de wijze waarop Peskin de hartspier modelleert. Het model bestaat uit een passief elastisch element (met passieve spanning T_P) in parallel met een serieschakeling (met actieve spanning T_A) van opnieuw een passief elastisch element en een contractiel element. In eerste instantie werd de lengteverandering van het contractiele element gegeven in functie van de tijd. Later werd deze lengteverandering dL_{CE} berekend in functie van de actieve spanning T_A , de lengte van de spier L en een activatieparameter α . De resulterende spanning T is dan

$$T = T_P(L) + T_A(L - L_{CE}), \quad (4.19)$$

waarbij L_{CE} voldoet aan

$$-dL_{CE}/dt = v(T_A, L, \alpha). \quad (4.20)$$

De activatieparameter is een gekende functie van de tijd gemeten na de stimulatie van de spier. De lengte van het contractiele element is nu geen gegeven functie van de tijd. L_{CE} voldoet een differentiaalvergelijking waarin de lengte van de spier voorkomt. L_{CE} hangt dus indirect af van de beweging van het fluïdum. Een impliciet schema voor deze differentiaalvergelijking is

$$L_{CE}^{n+1} = L_{CE}^n - \Delta t v(T_A^{n+1}, L^{n+1}, \alpha^{n+1}), \quad (4.21)$$

met

$$T_A^{n+1} = T_A(L^{n+1} - L_{CE}^{n+1}). \quad (4.22)$$

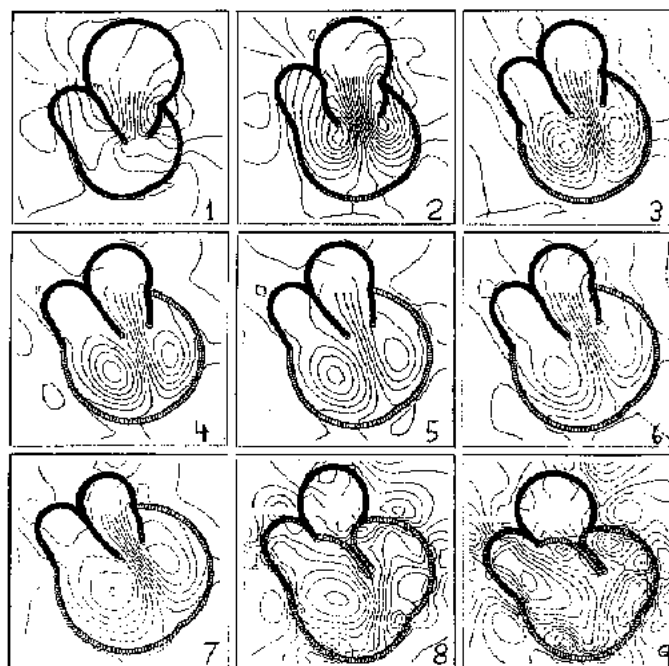
Door substitutie van vgl. (4.21) in (4.22) wordt L_{CE}^{n+1} geëlimineerd en wordt een verband bekomen tussen de lengte en spanning in de spier. Dit verband is verschillend voor elke tijdstap.

Voor een beschrijving van andere elementen zoals artificiële kleppen, wordt naar de literatuur verwezen.

De discretisatie van de Navier-Stokes-vergelijkingen gebeurt met een centrale methode. Het nadeel van deze methode is dat er slechts kan gerekend worden met een cel-Reynoldsgetal van 2. Peskin rekent meestal met een fluïdum waarvan de viscositeit 25 maal groter is dan die van bloed. De oplossing van de Navier-Stokes-vergelijkingen wordt bekomen door middel van de druk-correctie methode.

Peskin vond als belangrijkste resultaat dat de chordae tendineae een belangrijke rol vervullen tijdens de diastole. Zonder chordae tendineae zou de mitraalklep te ver openen tijdens begin van diastole zodat het sluiten van de klep gepaard gaat met een belangrijke regurgitatie. Dit fenomeen werd door andere onderzoekers [3, 65] tegengesproken. Door te werken bij te lage Reynoldsgetalen zou de jet die zich vormt bij het openen van de klep te snel uitbreiden, waardoor de klep te ver doorslaat. Dit zou niet het geval zijn bij hogere Reynoldsgetalen.

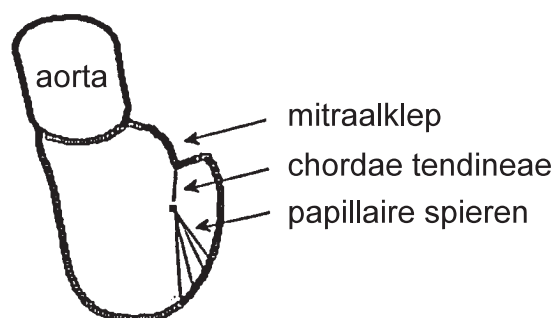
Figuur 4.4 toont het berekende stroomlijnpatroon voor de modellering van de natuurlijke mitraalklep. Beeld 1 toont de opening van de mitraalklep. Merk hierbij de stroomlijnen op die de mitraalklep snijden. In beeld 2 treedt wervelvorming op aan de tippen van de klepbladen die een sluitende beweging inzetten. De ventriculaire vulling wordt afgebeeld in de beelden 3 tot en met 5. De atriale systole verhoogt de transmitraalstroming en versterkt de wervelvorming (beelden 6 en 7) waardoor uiteindelijk de mitraalklep sluit (beeld 8). Dan vangt de ventriculaire systole aan (beeld 9).



Figuur 4.4: Peskin : stromingspatronen in het linkerhart (2D-model).

4.2.2b Model van Vesier

Vesier et al. [139] gebruikten een 2D dunwandig model voor de linkerventrikel. Zij veronderstelden een lineair verband tussen spanning en rek. Dit verband is constant voor passief weefsel en tijdsafhankelijk voor contractiel weefsel. De grootte en vorm van het model werd gebaseerd op 2D-echografische gegevens van een normaal ventrikel met mitraalklep en aortaklep. Figuur 4.5 toont het model waarbij de papillaire spieren en chordae tendineae mee worden gemodelleerd. Zij gebruikten de oplossingsmethode van Peskin voor de stromingsberekening en de vloeistof-wand interactie. Zij toonden aan dat door een verplaatsing van de papillaire spieren het onmogelijk was om de mitraalklep in de goede positie te houden. Zij stelden dit vast doordat deze verplaatsing het doorslaan van de klep bevorderde.



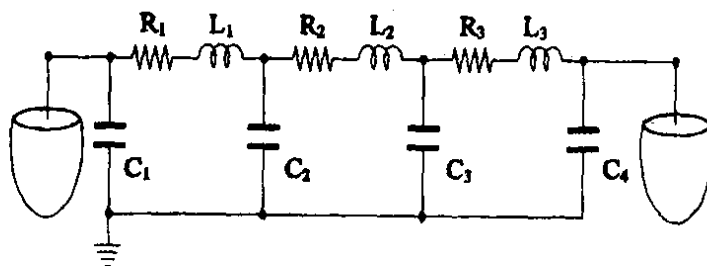
Figuur 4.5: Vesier : model voor de linkerventrikel.

4.2.3 Bewegende roosters

4.2.3a Model van Redaelli

Redaelli et al. [105] modelleren de ejectiefase van de linkerventrikel. De ventrikel wordt benaderd door een ellipsoïde en er wordt verondersteld dat de stroming axisymmetrisch is. De Navier-Stokes-vergelijkingen worden opgelost met het commerciële softwarepakket FIDAP waarbij geen ALE formulering wordt gebruikt.

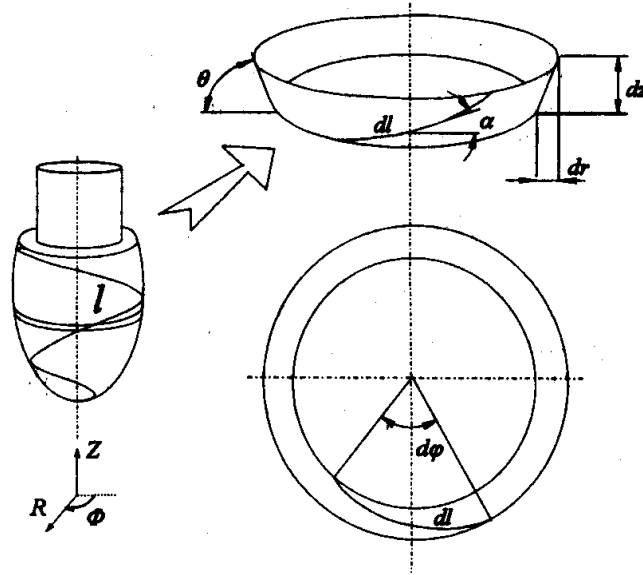
Er wordt aangenomen dat de druk ter hoogte van de aortaklep uniform is over de klep. Deze variatie van deze druk in de tijd wordt berekend met een dynamisch model voor het arterieel systeem. Dit gebeurt aan de hand van een elektrische analogie (figuur 4.6). De weerstand, de spoel en de condensator simuleren respectievelijk de stromingsweerstand en de inertie in de slagaders en de compliantie van de arteriële wand.



Figuur 4.6: Redaelli : elektrische analogie voor het arterieel systeem.

De hartspierwand wordt gemodelleerd aan de hand van twee groepen spiervezels. De draaizin van de twee groepen spiervezels is tegengesteld zodat in de uiteindelijke verplaatsing geen torsie optreedt. De krachten in de vezels zijn afhankelijk van de tijd en van de positie in de vezel. Op deze manier wordt het niet-lineair anisotroop gedrag van de hartspierwand in rekening gebracht. Figuur 4.7 toont de globale en lokale voorstelling van de hartspierwand. In de figuur wordt het verloop van één vezel getoond.

De koppeling tussen het stromingsprobleem en de positie van de hartspierwand wordt iteratief verwezenlijkt. Eerst wordt een schatting voor de druk opgelegd aan de hartspierwand. Hierdoor wordt een verplaatsing bekomen. Met deze verplaatsing wordt het rooster bewogen en wordt een nieuwe druk berekend uit het stromingsprobleem. Indien deze druk afwijkt van de geschatte druk wordt een nieuwe schatting gemaakt en wordt het proces herhaald tot convergentie wordt bekomen.



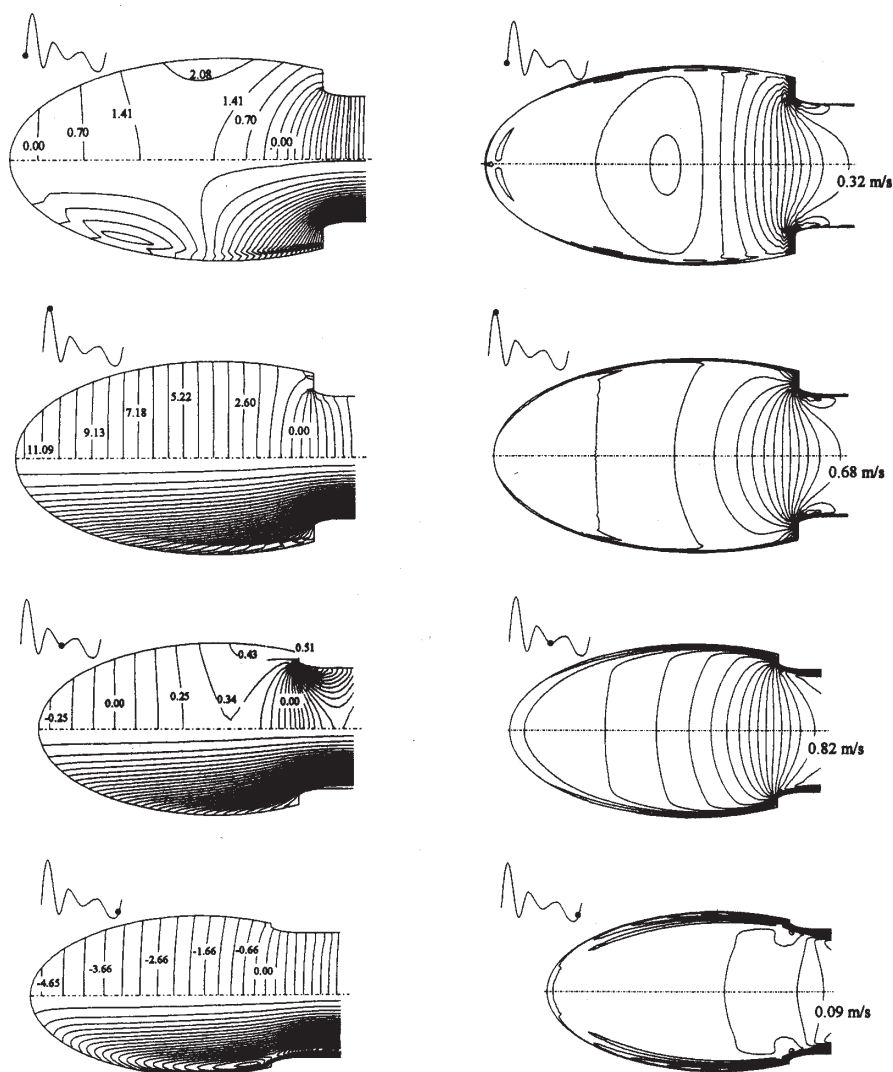
Figuur 4.7: Redaelli : globale en lokale voorstelling van de hartspierwand, één vezel wordt getoond.

Figuur 4.8 toont berekende isobaren, stroomlijnpatronen en isosnelheidscontouren tijdens de ejectiefase. Het is duidelijk dat tijdens deze ejectiefase intraventriculaire drukgradiënten worden berekend.

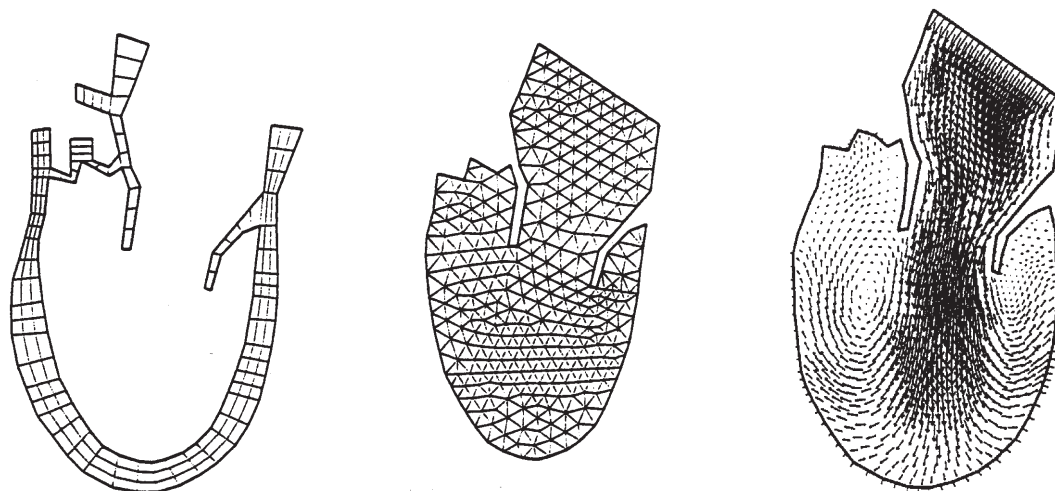
4.2.3b Model van Chahboune

Chahboune [15] ontwikkelde een tweedimensionaal model voor de linkerventrikel en simuleerde een volledige hartslag. Een eindig elementenmodel wordt gebruikt zowel voor de berekening van de bloedstroming als voor de verplaatsing van de hartspierwand. De verdeling van de spanningen in de hartspierwand wordt meegerekend. Er wordt ook hier geen ALE formulering gebruikt voor de berekening van de bloedstroming. Voor de vloeistof-wand interactie wordt eerst de verplaatsing van de wand berekend uitgaande van drukken uit het stromingsprobleem. Deze snelheden van de randknopen wordt dan gebruikt als randvoorwaarde voor de stromingsberekening. Hieruit volgen dan opnieuw drukken ter hoogte van de rand die leiden tot een nieuwe bepaling voor de positie van de rand. Deze cyclus wordt dan herhaald tot convergentie wordt bereikt.

De roosters voor de stromingsberekening en voor de bepaling van de positie van de hartspierwand worden getoond in figuur 4.9. De figuur toont ook een berekend snelheidsveld tijdens de diastole.



Figuur 4.8: Redaelli : berekende isobaren (figuren links, boven in de figuur), stroomlijnpatronen (figuren links, onder in de figuur) en isosnelheidscontouren (figuren rechts) op vier verschillende tijdstippen tijdens de ejectiefase. Het tijdsverloop wordt aangeduid aan de hand van de optredende drukgradiënt tussen basis en apex : 2 ms na opening van de aortaklep, maximale intraventriculaire drukgradiënt, tweede negatieve piek van de drukgradiënt, 2 ms voor de sluiting van de aortaklep.



Figuur 4.9: Chahboune : rooster voor de positie van de hartspierwand (links), rooster voor de stromingsberekening (midden) en snelheidsvectoren tijdens de diastole (rechts).

4.2.3c Model van Taylor en Yamaguchi

Taylor en Yamaguchi ontwikkelden een driedimensionaal model voor de studie van de linkerventriculaire ejectiefase. Eerst werd de wand voorgesteld als een sfeer, waarvan de straal werd gewijzigd aan de hand van een voorgeschreven wet [126]. Nadien werd een wandmodel gebruikt aan de hand van anatomische gegevens van een hondenhart. De beweging van de wand werd opgelegd aan de hand van vijftientig vervormingstoestanden van de hartspierwand [127]. Er werd hier ook niet gerekend met de ALE formulering voor het stromingsprobleem. Zij veronderstellen immers dat de snelheid van de wand klein is in vergelijking met de snelheid van het bloed in de omgeving van de wand. Dit kan zeker niet het geval zijn op de plaatsen waar de snelheidsvector loodrecht op de spierwand staat. Op die plaatsen zijn immers beide snelheden even groot.

4.2.3d Model van Heude Bihannic

Heude Bihannic implementeerde de ALE formulering in het commerciële pakket N3S. Voor de simulatie van de stroming in de linkerventrikel wordt een sferisch model gebruikt waarin de straal de positie van de wand bepaalt. Het vloeistof-wand interactiemodel waarvan sprake is, is een globaal model met als enige parameter de straal van de sfeer. Er wordt aangenomen dat er een lineair verband bestaat tussen de gemiddelde druk in de sfeer en de straal van de sfeer. In het werk wordt gerapporteerd dat pogingen om de koppeling te verwezenlijken tot dan toe mislukt waren.

4.3 Discussie

In dit werk wordt gekozen voor een axisymmetrisch model om de hartspierwand en de stroming in de linkerventrikel te beschrijven. Hierbij wordt gerekend met bewegende roosters. De fysische rand voor de stromingsberekening komt dan op ieder ogenblik overeen met de positie van de hartspierwand.

In tegenstelling met de methode van Peskin dienen er dan geen stromingsvergelijkingen opgelost worden buiten de hartspierwand. De randen van het stromingsgebied zijn in dat geval artificiële randen waar niet-fysische randvoorwaarden dienen opgelegd te worden zoals periodiciteit in het geval van Peskin. Deze periodieke randvoorwaarden betekenen dat een oneindig aantal harten links- en rechts, boven- en onder en voor- en achter in drie dimensies naast elkaar aan het kloppen zijn, waarbij elk hart het andere beïnvloedt. Men kan aannemen dat hoe verder deze harten uit elkaar gelegen zijn hoe minder ze elkaar zullen beïnvloeden. In de praktijk worden de harten echter dicht bij elkaar gelegd zodat het rekendomein niet te groot wordt. Het model van Peskin is omwille van deze niet-fysische randvoorwaarde ook niet zomaar uitbreidbaar naar axisymmetrische stroming.

In het model van Peskin wordt ook aangenomen dat het hart omgeven is door vloeistof dat ook moet versneld worden bij de verplaatsing van de hartspierwand. Er zijn dan bijkomende krachten nodig om dit te verwezenlijken. In vivo ligt het hart echter in de omgeving van de longen, die met lucht gevuld zijn waarvan de soortelijke massa ongeveer een factor 1000 kleiner is. De krachten die nodig zijn om deze lucht te verplaatsen zijn dan ook een factor 1000 kleiner.

Uit bovenstaande overweging is het evenwel duidelijk dat in ons geval bij de modellering van de hartspierwand ook de invloed van het omringende weefsel dient meegenomen te worden. Dit wordt echter voor de eenvoud niet gedaan.

Voor de stromingsberekening wordt uiteraard gekozen voor de ALE formulering aangezien deze toelaat om te rekenen op bewegende roosters zonder verdere ingrepen zoals hierboven beschreven.

De koppelingsstrategie is gelijkaardig als deze van Chahboune (zie §4.2.3b). Er wordt evenwel optimaal gebruik gemaakt van het feit dat voor de stromingsberekening een pseudo-compressibiliteitsmethode wordt gebruikt. Deze methode laat toe om tijdens het oplossen van de incompressibele stromingsvergelijkingen te rekenen met een eindige golfvoortplantingssnelheid in het fluïdum. Door de koppeling van de incompressibele stroming met een elastische wand, ontstaat er immers een macroscopisch zichtbare golfvoortplanting met eindige snelheid. Door beide op elkaar af te stemmen kan men zeer snel tot een oplossing komen voor het gekoppelde probleem gedurende iedere tijdstap. Dit wordt verder beschreven in hoofdstuk 8.

4.4 Besluit

In dit hoofdstuk werd een overzicht gegeven van verschillende soorten numerieke modellen voor stromings simulaties in de hartkamers. Er werd een indeling gemaakt volgens de stromingsmethodes. De voorkomende methodes zijn de potentiaal- en wervelmethodes, de methode met ondergedompelde randen en de methodes met bewegende roosters.

In de discussie werd uitgelegd waarom er in dit werk wordt gekozen voor de methode met bewegende roosters, waarbij de ALE-formulering wordt gebruikt voor de stromingsberekening. Deze methode wordt uitvoerig beschreven in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 5

Het stromingsprobleem

5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de berekeningsmethode voor het oplossen van de stromingsvergelijkingen voorgesteld. Aangezien tijdens de vulling van het hart de hartspierwand beweegt, moeten de niet-stationaire stromingsvergelijkingen opgelost worden in een bewegende geometrie.

Het eerste deel van dit hoofdstuk omvat de beschrijving van de discretisatiemethode voor de stationaire incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen. Een nieuwe methode werd ontwikkeld die gebaseerd is op de pseudo-compressibiliteitsmethode. Deze methode is geschikt om te werken op roosters met hoge aspectverhoudingen.

Verder wordt in dit deel aangetoond dat de uitbreiding naar stromingsproblemen met lage Mach-getallen voor de hand ligt. Deze uitbreiding naar lage Mach-getallen is echter niet bruikbaar voor de berekening van de stroming in de hartkamers, aangezien de bloedstroming incompressibel is. Ze wordt enkel gedaan om aan te tonen dat de ontwikkelde methode algemeen bruikbaar is en een potentieel inhoudt om de flux-differentiesplitser te vervangen. Hiervoor dient evenwel aangetoond te worden dat de methode ook voor hoge Mach-getallen bruikbaar is. Dit wordt hier niet uitgewerkt omdat de toepassing in dit werk immers incompressibel blijft.

In een tweede deel van dit hoofdstuk wordt dan uitgelegd hoe de uitbreiding gebeurt van deze discretisatiemethode naar tweedimensionale axisymmetrische bewegende niet-gestructureerde roosters. Hierbij wordt verondersteld dat de beweging van het rooster gekend is. Deze kan berekend worden als de beweging van de rand gekend is (hoofdstuk 7).

Het is dus belangrijk om te onthouden dat voor de berekening van de stromingstoestand in de hartkamer verondersteld wordt dat de verplaatsing van de hartspierwand gekend is. Deze moet ofwel op voorhand opgemeten worden ofwel berekend worden met een model dat de verplaatsing van de hartspierwand beschrijft. Het is enkel deze tweede aanpak die verder in dit werk gebruikt wordt. Bovendien is de verplaatsing van de hartspierwand afhankelijk van de bekomen stromingstoestand. Deze wisselwerking of vloeistof-wand interactie wordt verder behandeld in hoofdstuk 8.

5.2 Stationaire incompressibele stroming

5.2.1 Inleiding

In dit deel wordt de discretisatiemethode behandeld voor de stationaire incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen. De methode is gebaseerd op de pseudo-compressibiliteitsmethode, maar aangepast om te werken op roosters met hoge aspectverhoudingen. De kracht van de methode wordt geanalyseerd met de Fourier-methode en numeriek aangetoond met voorbeelden op tweedimensionale niet-bewegende gestructureerde roosters.

De pseudo-compressibiliteitsmethode behoort tot de familie van de preconditioneringsmethodes. Preconditionering van de incompressibele [132, 150] en compressibele Navier-Stokes-vergelijkingen [132, 150, 46, 66, 16] wordt op dit ogenblik zeer veel gebruikt om de convergentiesnelheid bij het oplossen van stromingsproblemen te verhogen en zo de rekentijd te verminderen. Voor compressibele stromingen blijkt dit zeker nodig wanneer het Mach-getal zeer laag wordt [63, 62]. Preconditionering blijkt echter niet altijd goed te werken op roosters met hoge aspectverhoudingen. Dit komt door de stijfheid van het stelsel, dat te wijten is aan het numeriek-anisotroop gedrag van de diffusieve en akoestische termen. Voor aspectverhoudingen die aangepast zijn aan de stroming kan preconditionering deze stijfheid verwijderen [66]. Een meer robuuste methode bestaat echter in het gebruik van een impliciete lijnmethode gecombineerd met multigrid [74]. Het is dan ook deze aanpak die in dit werk wordt gebruikt.

Verder wordt in dit deel ook aangetoond dat de uitbreiding naar compressibele stromingen met laag Mach-getal voor de hand ligt.

5.2.2 Stromingsvergelijkingen

De tweedimensionale stationaire Navier-Stokes-vergelijkingen worden in conservatieve vorm voor een incompressibel fluïdum geschreven als

$$\frac{\partial}{\partial x}u^2 + \frac{\partial}{\partial y}uv + \frac{\partial}{\partial x}p' = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}uv + \frac{\partial}{\partial y}v^2 + \frac{\partial}{\partial y}p' = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (5.2)$$

De continuïteitsvergelijking wordt gegeven door

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.3)$$

Hierbij zijn u en v de Cartesische componenten van de snelheid zijn, p' is de kinematische druk ($p' = p/\rho$), p is de druk, ρ is de soortelijke massa en ν is de kinematische viscositeit.

Het stelsel van vergelijkingen (5.3)-(5.2) kan in systeemvorm geschreven worden als

$$\frac{\partial F_c}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial x} + \frac{\partial G_c}{\partial y} + \frac{\partial G_a}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y}, \quad (5.4)$$

waarbij F_c en G_c de convectieve fluxen zijn, F_a en G_a de akoestische fluxen en F_v en G_v de viskeuze fluxen :

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 \\ u^2 \\ uv \end{bmatrix}, \quad F_a = \begin{bmatrix} u \\ p' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \nu \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

en

$$G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ uv \\ v^2 \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ p' \end{bmatrix}, \quad G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \nu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Een onderscheid wordt gemaakt tussen het convectief en akoestisch deel van de niet-viskeuze fluxvector omdat een verschillende ruimtelijke en tijdsdiscretisatie gebruikt wordt voor deze delen.

5.2.3 Ruimtelijke discretisatie

De discretisatie van de convectieve flux is gebaseerd op 'velocity upwinding' :

$$F_{c_{i+1/2}} = u_{i+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}_{L/R}, \quad G_{c_{j+1/2}} = v_{j+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}_{L/R}, \quad (5.7)$$

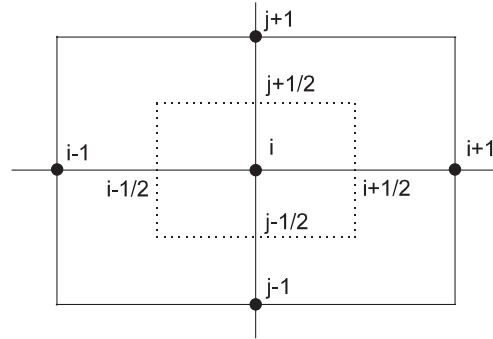
waarbij

$$(\cdot)_{L/R} = \begin{cases} (\cdot)_L & \text{als } u_{1/2} > 0 \\ (\cdot)_R & \text{in het andere geval} \end{cases} \quad (5.8)$$

en

$$u_{i+1/2} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, \quad v_{j+1/2} = \frac{v_j + v_{j+1}}{2}. \quad (5.9)$$

Er wordt gebruik gemaakt van een verkorte voorstelling van de indices. Zo wordt bijvoorbeeld $u_{i,j}$ voorgesteld door u_i of u_j en $u_{i,j+1}$ wordt voorgesteld door u_{j+1} . De index die niet verschoven is ten opzichte van i of j wordt weggelaten (figuur 5.1).



Figuur 5.1: Hoekpunt-gecentreerd controlevolume.

De linkse (L) en rechtse (R) waarden worden berekend met de Van Leer- κ methode :

$$q_L = q_i + \frac{1}{4} [(1 + \kappa)(q_{i+1} - q_i) + (1 - \kappa)(q_i - q_{i-1})], \quad (5.10)$$

$$q_R = q_{i+1} - \frac{1}{4} [(1 + \kappa)(q_{i+1} - q_i) + (1 - \kappa)(q_{i+2} - q_{i+1})], \quad (5.11)$$

met $\kappa=1/3$ voor derde-orde-nauwkeurigheid. Voor eerste-orde-nauwkeurigheid worden de linkse en rechtse waarden gegeven door

$$q_L = q_i, \quad q_R = q_{i+1}. \quad (5.12)$$

q staat voor om het even welke toestandsvariabele u, v of p' .

De akoestische flux wordt centraal gediscrètiseerd :

$$F_{a_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} u \\ p' \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1/2}, \quad G_{a_{j+1/2}} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ p' \end{bmatrix}_{j+1/2}. \quad (5.13)$$

De discretisatie van de convectieve en akoestische termen komt overeen met het originele AUSM-schema (Advective Upwind Splitting Method) [70] wanneer de energievergelijking wordt weggelaten, een constante ρ wordt aangenomen en wanneer het Mach-getal naar nul gaat.

De viskeuze flux wordt ook centraal gediscrètiseerd :

$$F_{v_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \\ \nu \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad G_{v_{j+1/2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} \\ \nu \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta y} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Aangezien de drukterm centraal wordt gediscrètiseerd, is drukstabilisatie nodig. In het originele AUSM-schema is geen drukstabilisatie wanneer het Mach-getal naar nul gaat. Daarom wordt een druk-snelheidskoppeling toegevoegd in een nieuwere versie van het AUSM-schema dat geschikt is voor alle snelheden [31]. Deze druk-snelheidskoppeling bestaat uit een artificiële diffusieterm die toegevoegd wordt aan de

massaflux. Zoals reeds aangetoond door Edwards et al. [31] moet deze term zich invers schalen met de snelheid. Dezelfde schaling van de druk-snelheidskoppelingsterm is ook aanwezig in het gepreconditioneerde Roe schema [150] en in de flux-differentiesplitsing voor incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen [29]. Deze druk-snelheidskoppeling introduceert een diffusieterm van de druk in de continuïteitsvergelijking en een 'opwinding' van de drukterm in de impulsvergelijkingen. Deze 'opwinding' in de impulsvergelijking is echter alleen maar nodig in het geval van compressibele stroming aangezien de hele fluxvector 'opwind' moet gediscetiseerd worden in het geval van supersone stroming.

Rekening houdend met vorige opmerking, dient enkel een artificiële dissipatieterm voor de druk toegevoegd te worden in de continuïteitsvergelijking. Dit gebeurt op de volgende manier :

$$F_{d_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} \delta \frac{p'_{i+1} - p'_i}{\beta_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{d_{j+1/2}} = \begin{bmatrix} \delta \frac{p'_{j+1} - p'_j}{\beta_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

waarbij β_x en β_y de dimensies van een snelheid bezitten. In dit werk worden β_x en β_y genomen als

$$\beta_x = w_r + \frac{2\nu}{\Delta x}, \quad \beta_y = w_r + \frac{2\nu}{\Delta y}, \quad (5.16)$$

waarbij w_r de maximale snelheid in het stromingsveld voorstelt en $\delta = 1/2$. In het geval van een niet-viskeuze stroming ($\nu = 0$), stemt deze term dan overeen met de dissipatieterm die geïntroduceerd wordt bij de flux-differentiesplitsing voor incompressibele stroming [29]. In overeenstemming met Weiss en Smith [150], worden β_x en β_y geschaald met de lokale diffusiesnelheden $\nu/\Delta x$ en $\nu/\Delta y$ wanneer deze belangrijk worden.

De volledige fluxvectoren zijn :

$$F = F_c + F_a - F_v - F_d, \quad G = G_c + G_a - G_v - G_d. \quad (5.17)$$

5.2.4 Tijdstap methode

Er wordt een tijdstap methode gebruikt om de stationaire oplossing te bekomen van de incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen. Aangezien de discretisatie van de fluxen gedeeltelijk expliciet en gedeeltelijk impliciet genomen worden, wordt geen transformatie naar de primitieve vorm van de vergelijkingen gedaan. Toepassing van de pseudo-compressibiliteitsmethode op de conservatieve vorm van het niet-viskeuze deel van de Navier-Stokes-vergelijking resulteert in :

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F_c}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial x} + \frac{\partial G_c}{\partial y} + \frac{\partial G_a}{\partial y} = 0. \quad (5.18)$$

Q is de vector van de variabelen $[p' \ u \ v]^T$. De preconditioneringsmatrix Γ wordt gegeven door

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

waarbij β de dimensie van een snelheid heeft. De eigenwaarden van het niet-viskeuze deel van het gepreconditioneerde systeem worden gegeven door

$$\lambda \left(\Gamma^{-1} \frac{\partial (n_x F + n_y G)}{\partial Q} \right) = w, w + c, w - c, \quad (5.20)$$

waarbij $w = n_x u + n_y v$, $c = \sqrt{w^2 + \beta^2}$ en n_x en n_y duiden een willekeurige richting aan waarbij $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Als β van dezelfde grootte-orde is als de convectieve snelheid zijn alle eigenwaarden in ten minste één richting goed geschaald.

Deze pseudo-compressibiliteitsmethode wordt gebruikt als gladder (smoother) voor de multigrid, zoals verder wordt getoond. Zoals reeds gezegd behoort de pseudo-compressibiliteitsmethode tot de familie van de lokale preconditioneringstechnieken. Het kan gemakkelijk gecontroleerd worden dat de preconditioneringsmethode van Weiss and Smith [150], toegepast op de incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen, overeenstemt met de standaard pseudo-compressibiliteitsmethode voor de primitieve vorm van de stromingsvergelijkingen. Deze lokale preconditioneringstechniek werkt

goed op isotrope roosters [66], maar op anisotrope roosters, met hoge aspectverhoudingen, werkt het alleen goed in bepaalde gevallen, wanneer gerekte (stretched) roosters gebruikt worden die aangepast zijn aan de stromingstoestand. Dit wordt aangetoond in de Fourier-analyse in de volgende paragraaf. Er wordt ook aangetoond dat een semi-impliciete discretisatie nodig is om een robuuste methode te hebben die geschikt is voor roosters met grote aspectverhoudingen.

5.2.4a Evolutie in pseudo-tijd

Er wordt gebruik gemaakt van een multitrappmethode met vier trappen :

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= Q^n \\
 Q_1 &= Q_0 + \alpha_1 \, cfl \, \Delta Q_0 \\
 Q_2 &= Q_0 + \alpha_2 \, cfl \, \Delta Q_1 \\
 Q_3 &= Q_0 + \alpha_3 \, cfl \, \Delta Q_2 \\
 Q_4 &= Q_0 + \alpha_4 \, cfl \, \Delta Q_3 \\
 Q^{n+1} &= Q_4
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

met $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ gelijk aan $\{1/4, 1/3, 1/2, 1\}$ en het *cfl*-getal gelijk aan 1.8. In hetgeen volgt, wordt dit *cfl*-getal het globale *cfl*-getal van de methode genoemd.

Deze multitrapp semi-impliciete methode wordt versneld door het gebruik van de multigridtechniek. Een volledige-benaderingsschema (FAS, full approximation scheme) wordt gebruikt in een W-cyclus met vier of vijf roosters. De berekening wordt gestart op het fijnste rooster om de volledige performantie van de methode te tonen. Als restrictie-operator wordt volle weging (full weighting) van het residu gebruikt. De prolongatie wordt gedaan met bilineaire interpolatie. Twee pre- en postrelaxaties worden uitgevoerd. Met vijf roosters resulteert dit in een kost van 32.375 werkeenheden voor elke multigridcyclus, indien één werkeenheid overeenstemt met een residu-evaluatie en een correctie, of een residu-evaluatie samen met een restrictie, de bronberekening op het grovere rooster en een prolongatie.

5.2.4b Bepaling van de pseudo-tijdstap

Beschouw een uniform Cartesisch rooster met constante roosterafstanden Δx , Δy . De tijdstap $\Delta\tau$ voor een cel in dit rooster wordt berekend als

$$\Delta\tau = \frac{1}{\frac{u + c_x}{\Delta x} + \frac{v + c_y}{\Delta y}}, \quad (5.22)$$

met

$$c_x = \sqrt{(u^2 + \beta^2)} \quad (5.23)$$

en

$$c_y = \sqrt{(v^2 + \beta^2)}. \quad (5.24)$$

Neem aan dat de stroming niet-viskeus is en gealigneerd aan de x-richting, d.w.z. $v = 0$. Als β wordt gekozen in dezelfde grootte-orde als u , hebben de drie eigenwaarden dezelfde grootte-orde in x-richting en alle golven worden in deze richting getransporteerd met een *cfl*-getal in de orde van de eenheid.

Er moet benadrukt worden dat indien het toelaatbare *cfl*-getal kleiner wordt, de convergentie zal verslechteren. Dit gebeurt in het geval van grote rooster-aspectverhoudingen. De rooster-aspectverhouding g_{ar} voor een Cartesisch rooster wordt hier gedefinieerd als

$$g_{ar} = \frac{\Delta x}{\Delta y}. \quad (5.25)$$

Als g_{ar} zeer groot is, wordt de toelaatbare tijdstap $\Delta\tau$ gelijk aan $\Delta y/c_y$ en het maximaal toegelaten *cfl*-getal in de x-richting is dan

$$cfl_x = \frac{(u + c_x)\Delta\tau}{\Delta x} = \frac{u + c_x}{c_y} \frac{1}{g_{ar}} \approx \frac{1}{g_{ar}}. \quad (5.26)$$

Dit leidt tot een sterke vermindering van de convergentiesnelheid. Er wordt getoond in de Fourier-analyse dat indien de akoestische fluxen in de y-richting impliciet gediscrètiseerd worden, het systeem stabiel blijft als de definitie van de tijdstap veranderd

wordt in

$$\Delta\tau = \frac{1}{\frac{u + c_x}{\Delta x} + \frac{\omega_1 v}{\Delta y}}, \quad (5.27)$$

waarbij ω_1 een schalingsfactor is. Als de stroming nu gealigneerd is aan de x-richting, is het cfl_x -getal gelijk aan 1.

Indien de viskeuze termen belangrijk worden, wordt de maximaal toelaatbare tijdstap gedetermineerd door het von-Neumann-getal

$$\Delta\tau = \frac{\Delta y^2}{2\nu} \quad (5.28)$$

en cfl_x zal alsnog klein worden.

Indien echter de viskeuze termen ook behandeld worden met een lijn impliciete methode in de y-richting, verdwijnt de von-Neumann-restrictie op de bepaling van de tijdstap en het cfl_x -getal is dan opnieuw in de orde van de eenheid. Daarom zal de gebruikte strategie bestaan uit een combinatie van een expliciete lokale preconditioneringsmethode samen met een impliciete lijnmethode in de richting van de kleinste roosterafstanden voor de akoestische en viskeuze delen van de fluxvector.

Deze semi-impliciete lijnmethode voor een rooster met kleine celafstanden in de y-richting wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \Gamma_L \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F_c^n}{\partial x} + \frac{\partial F_a^n}{\partial x} - (A_v + A_d) (Q_{i-1,j}^n - 2Q_{i,j}^{n+1} + Q_{i+1,j}^n) \\ + \frac{\partial G_c^n}{\partial y} + \frac{\partial G_a^{n+1}}{\partial y} - (B_v + B_d) (Q_{i,j-1}^{n+1} - 2Q_{i,j}^{n+1} + Q_{i,j+1}^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

waarbij A_v , B_v , A_d en B_d gegeven worden door

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{\Delta y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{\Delta y^2} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

en

$$A_d = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\beta_x} \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\beta_y} \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Om de performantie van de methode te testen, wordt als vergelijkingsbasis de semi-impliciete puntmethode gebruikt. Voor deze methode worden de vergelijkingen gegeven door

$$\begin{aligned} \Gamma_P \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F_c^n}{\partial x} + \frac{\partial F_a^n}{\partial x} - (A_v + A_d) (Q_{i-1,j}^n - 2Q_{i,j}^{n+1} + Q_{i+1,j}^n) \\ + \frac{\partial G_c^n}{\partial y} + \frac{\partial G_a^n}{\partial y} - (B_v + B_d) (Q_{i,j-1}^n - 2Q_{i,j}^{n+1} + Q_{i,j+1}^n) = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Aangezien de akoestische termen centraal worden gediscetiseerd, worden deze termen expliciet behandeld in de semi-impliciete puntmethode.

5.2.5 Fourier-analyse

De schema's van de vorige paragraaf worden nu geanalyseerd met de Fourier-methode. Hiervoor wordt een Cartesisch rooster beschouwd zonder rekking van het rooster (stretching) en periodieke randvoorwaarden worden aangenomen. Dan kan iedere pseudo-tijdstap de toestand Q geschreven worden als de som van de stationaire oplossing \overline{Q} en een fout Ψ die functie is van de pseudo-tijd $\Delta\tau$

$$Q(x, y, \tau) = \overline{Q}(x, y) + \Psi(x, y, \tau). \quad (5.33)$$

De fout kan geschreven worden als een som van Fourier-golven. De Fourier-component met golfgetal ω_x in x-richting and golfgetal ω_y in y-richting wordt geschreven als

$$\psi_{\omega_x, \omega_y}(x, y, \tau) = \phi(\tau) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)}, \quad (5.34)$$

waarbij j de imaginaire eenheid aanduidt. De substitutie van de vergelijking (5.33) in het stelsel van vergelijkingen (5.32) resulteert in een stelsel van vergelijkingen voor de fout. De lineaire termen blijven identisch. De kwadratische termen vereisen enige uitleg.

Als voorbeeld wordt de fout afkomstig van de kwadratische term

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} \quad (5.35)$$

uitgeschreven. Door gebruik te maken van vergelijking (5.7), wordt de eerste orde discretisatie van deze term voor een positieve snelheidscomponent u geschreven als

$$\frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+1/2} u_i - u_{i-1/2} u_{i-1} \right). \quad (5.36)$$

Voor de behandeling van de kwadratische termen, wordt verder aangenomen dat de stroming uniform is. Dan kan u geschreven worden als

$$u_k = \bar{u} + \psi_k, \quad (5.37)$$

waarbij k voor om het even welke index staat en \bar{u} constant is. Door gebruik te maken van bovenstaande uitdrukking, wordt vergelijking (5.36) omgevormd tot

$$\frac{1}{\Delta x} \bar{u} \left(\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2} + \psi_i - \psi_{i-1} + O(\psi^2) \right). \quad (5.38)$$

Met gebruik van vergelijking (5.34), kan de coëfficiënt van de term $e^{j(\omega_x x + \omega_y y)}$ geschreven worden als

$$\phi(t) \bar{u} \left(\text{ce}(\theta_x, \Delta x) + \text{up}(\theta_x, \Delta x) \right), \quad (5.39)$$

waarbij

$$\text{ce}(\theta, \Delta s) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2\Delta s}, \quad (5.40)$$

en

$$\text{up}(\theta, \Delta s) = \frac{1 - e^{-j\theta}}{\Delta s} k(\theta), \quad (5.41)$$

met $\theta = \omega \Delta s$ en $k(\theta) = 1$ voor het eerste orde 'upwind' gediscrètiseerde schema. Voor de Van Leer- κ methode (5.10), wordt $k(\theta)$ gegeven door

$$k(\theta) = 1 + \frac{1}{4} \left[(1 + \kappa) (e^{j\theta} - 1) + (1 - \kappa) (1 - e^{-j\theta}) \right]. \quad (5.42)$$

Gelijkaardige uitdrukkingen worden bekomen indien de snelheidscomponent u negatief is. Voor de volledigheid wordt ook de term $vi(\theta, \Delta s)$ gedefinieerd, die nodig is voor de viskeuze bijdrage en de artificiële dissipatieterm, als

$$vi(\theta, \Delta s) = \frac{-e^{-j\theta} + 2 - e^{j\theta}}{\Delta s^2}. \quad (5.43)$$

Wanneer de hogere orde termen in de fout verwaarloosd worden, moet volgend stelsel voor de fout opgelost worden tijdens elke stap van het multitrapp-tijdstapschema :

$$\hat{P} \Delta \Psi + \hat{C} \Psi = 0. \quad (5.44)$$

Het Fourier-symbool $\mathcal{F}(\theta_x, \theta_y)$ wordt dan gegeven door

$$\mathcal{F}(\theta_x, \theta_y) = -cfl \hat{P}(\theta_x, \theta_y)^{-1} \hat{C}(\theta_x, \theta_y). \quad (5.45)$$

De uitdrukkingen voor \hat{P} zijn afhankelijk van de gebruikte tijdstapmethode en worden verderop gegeven. De uitdrukking voor \hat{C} wordt gegeven door

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}, \quad (5.46)$$

waarbij \hat{A} de som is van de convectieve term \hat{A}_c , de akoestische term \hat{A}_a , de diffusieterm \hat{A}_v en de artificiële dissipatieterm \hat{A}_d in de x-richting, en waarbij \hat{B} de som is van de overeenkomstige termen in de y-richting :

$$\hat{A} = \hat{A}_c + \hat{A}_a + \hat{A}_v + \hat{A}_d, \quad (5.47)$$

$$\hat{B} = \hat{B}_c + \hat{B}_a + \hat{B}_v + \hat{B}_d, \quad (5.48)$$

waarbij

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}(\text{up}(\theta_x, \Delta x) + \text{ce}(\theta_x, \Delta x)) & 0 \\ 0 & \bar{v}\text{ce}(\theta_x, \Delta x) & \bar{u}\text{up}(\theta_x, \Delta x) \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

$$\hat{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}\text{up}(\theta_y, \Delta y) & \bar{u}\text{ce}(\theta_y, \Delta y) \\ 0 & 0 & \bar{v}(\text{up}(\theta_y, \Delta y) + \text{ce}(\theta_y, \Delta y)) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

en

$$\hat{A}_a = \begin{bmatrix} 0 & \text{ce}(\theta_x, \Delta x) & 0 \\ \text{ce}(\theta_x, \Delta x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

$$\hat{B}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{ce}(\theta_y, \Delta y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{ce}(\theta_y, \Delta y) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

en

$$\hat{A}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \text{vi}(\theta_x, \Delta x) & 0 \\ 0 & 0 & \nu \text{vi}(\theta_x, \Delta x) \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

$$\hat{B}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \text{vi}(\theta_y, \Delta y) & 0 \\ 0 & 0 & \nu \text{vi}(\theta_y, \Delta y) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

en

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\beta_x} \text{vi}(\theta_x, \Delta x) \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\beta_y} \text{vi}(\theta_y, \Delta y) \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

5.2.5a Semi-impliciete lijnmethode

Voor de semi-impliciete lijnmethode wordt \hat{P} gegeven door

$$\hat{P} = \hat{\Gamma}_L + \hat{B}_a + \hat{B}_v + \hat{B}_d, \quad (5.57)$$

met

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_L &= \frac{\Gamma}{\Delta\tau} + 2\omega_2 A_d + 2\omega_3 A_v \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2 \Delta\tau} + \omega_2 \frac{2\delta}{\beta_x \Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta\tau} + \omega_3 \frac{2\nu}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta\tau} + \omega_3 \frac{2\nu}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

waarbij

$$\beta = \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{2\nu}{\Delta x} \quad (5.59)$$

en

$$\Delta\tau = \frac{1}{\frac{u + c_x}{\Delta x} + \frac{\omega_1 v}{\Delta y}}, \quad (5.60)$$

met c_x berekend zoals in (5.23) met β gegeven door (5.59).

De invoering van de schalingsfactor ω_1 resulteert in een verschillende schaling voor de convectieve snelheid in de richting van de impliciete lijnen (y-richting) in vergelijking met de convectieve snelheid in x-richting. De invoering van ω_2 en ω_3 laat een verschillende schaling toe voor de artificiële dissipatieterm en de viskeuze termen. De reden voor deze verschillende schalingsfactoren wordt uitgelegd bij de discussie van de generieke testgevallen (zie §5.2.6). In (5.59) is er geen viskeuze bijdrage afkomstig van de y-richting en in (5.60) is er geen akoestische bijdrage van de y-richting omdat de akoestische termen impliciet behandeld worden in deze richting.

5.2.5b Semi-impliciete puntmethode

Voor de semi-impliciete puntmethode wordt \hat{P} gegeven door $\hat{\Gamma}_P$, met

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_P &= \frac{\Gamma}{\Delta\tau} + 2\omega_2 (A_d + B_d) + 2\omega_3 (A_v + B_v) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{P_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Gamma}_{P_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Gamma}_{P_{33}} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (5.61)$$

$$\hat{\Gamma}_{P_{11}} = \frac{1}{\beta^2 \Delta\tau} + \omega_2 \left(\frac{2\delta}{\beta_x \Delta x} + \frac{2\delta}{\beta_y \Delta y} \right), \quad (5.62)$$

$$\hat{\Gamma}_{P_{22}} = \hat{\Gamma}_{P_{33}} = \frac{1}{\Delta\tau} + \omega_3 \left(\frac{2\nu}{\Delta x^2} + \frac{2\nu}{\Delta y^2} \right), \quad (5.63)$$

met

$$\beta = \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{2\nu}{\Delta x} + \frac{2\nu}{\Delta y} \quad (5.64)$$

en

$$\Delta\tau = \frac{1}{\frac{u + c_x}{\Delta x} + \frac{v + c_y}{\Delta y}}, \quad (5.65)$$

met c_x en c_y berekend zoals in (5.23) en (5.24) met β gegeven door (5.64).

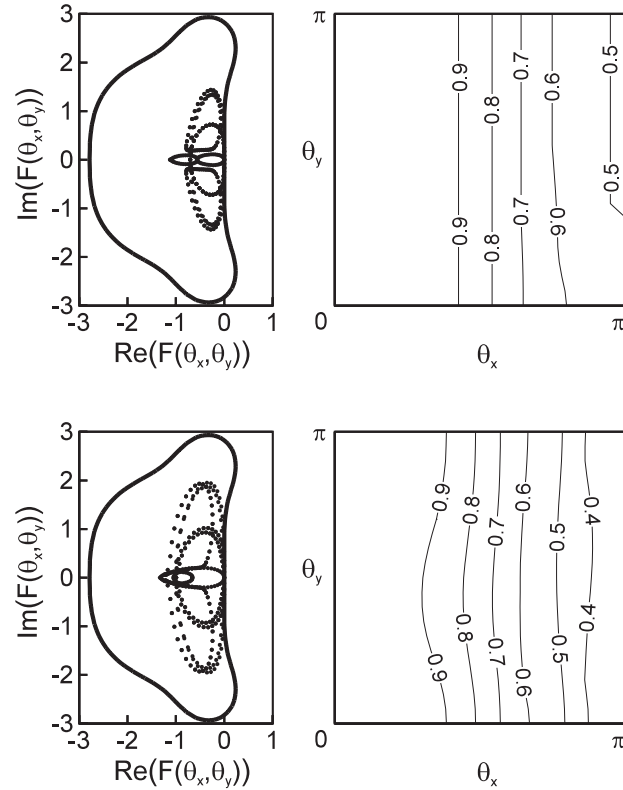
Ook in dit geval worden de schalingsfactoren ω_2 en ω_3 ingevoerd voor de schaling van de artificiële dissipatieterm en de viskeuze termen. De generieke testgevallen (zie §5.2.6) tonen waarom deze schalingsfactoren worden ingevoerd.

5.2.6 Generieke testgevallen

In deze paragraaf worden verschillende stromingsgevallen geanalyseerd en wordt een vergelijking gemaakt tussen de semi-impliciete lijnmethode en de semi-impliciete puntmethode. In de volgende figuren worden in het linkerpaneel de eigenwaarden van het Fourier-symbool $\mathcal{F}(\theta_x, \theta_y)$ getoond in het complexe vlak voor $\theta_x \in [0, 2\pi]$ met stappen van $\Delta\theta_x = \pi/20$ en voor $\theta_y = 0, \pi/2, \pi$ en $3\pi/2$. Zoals reeds uitgelegd gebeurt de evolutie in pseudo-tijd aan de hand van viertrapsiteratiemethode met

standaardcoëfficiënten. Het stabiliteitsgebied van deze methode wordt ook getoond in hetzelfde complexe vlak in het linkerpaneel van de figuren. In het rechterpaneel worden de stabiliteitsresultaten getoond in het (θ_x, θ_y) vlak. Voor elke (θ_x, θ_y) combinatie wordt de maximum modulus van de eigenwaarden van de amplificatiematrix getoond. Elke figuur is bovendien opgesplitst in een bovenpaneel en een onderpaneel. Bovenaan worden de resultaten getoond voor de puntmethode en onderaan voor de lijnmethode. Alle Fourier-symbolen en stabiliteitsresultaten zijn berekend met een cfl -getal van 1.8, aangezien dit cfl -getal gebruikt werd voor de experimentele verificatie van de verschillende testgevallen.

5.2.6a Niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1$



Figuur 5.2: Stabiliteitsresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.

Figuur 5.2 toont een goede damping in x-richting voor zowel de punt- als de lijnmethode. Voor $\theta_x = 0$ wordt één eigenwaarde van de matrix \hat{C} (5.46) gelijk aan nul. Dit

komt door de alignering. In dit geval ($\theta_x = 0, v = 0$) wordt de matrix \hat{C} gegeven door

$$\hat{C}_{\text{gealigneerd}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\beta_y} \text{vi}(\theta_y, \Delta y) \Delta y & 0 & \text{ce}(\theta_y, \Delta y) \\ 0 & 0 & \bar{u} \text{ce}(\theta_y, \Delta y) \\ \text{ce}(\theta_y, \Delta y) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Deze matrix bezit een kolom van nullen en bijgevolg is er één eigenwaarde gelijk aan nul. De amplificatiematrix $\hat{P}^{-1}\hat{C}$ heeft dus ook een eigenwaarde gelijk aan nul en daarom is de versterkingsfactor gelijk aan 1.

Een eigenwaarde die gelijk wordt aan nul betekent een verlies aan koppeling voor de corresponderende eigenvectorcombinatie van de variabelen.

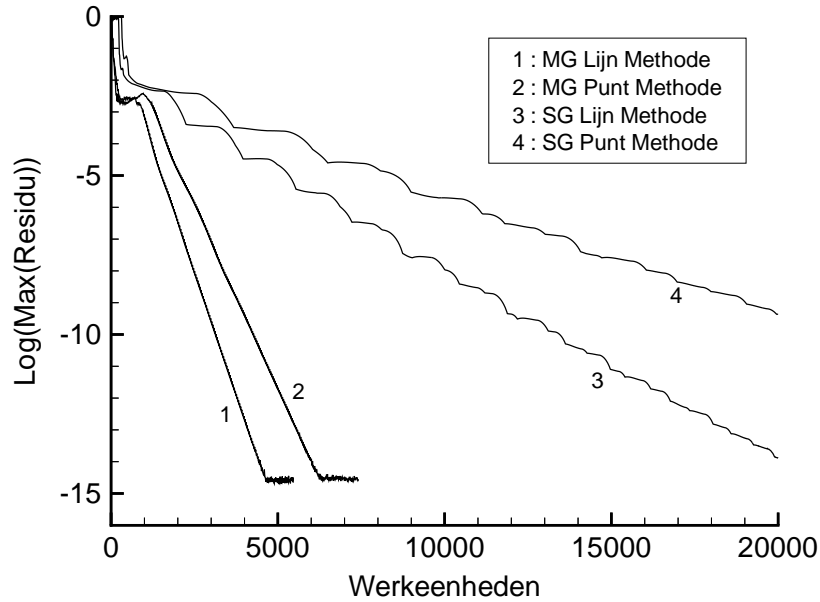
Dit wordt dikwijls als oorzaak gezien voor de trage convergentie in gealigneerde stroming. Dit zou betekenen dat bij om het even welke stromingssituatie waarbij het grootste deel van het stromingsveld gealigneerd is aan het rooster, de convergentie traag zou zijn. Berekeningen echter tonen aan dat dit niet correct is.

Er wordt aangenomen dat zolang in één richting alle eigenwaarden van dezelfde grootte-orde zijn en deze richting eindigt op een Dirichlet-randvoorwaarde of eindigt in een stromingsveld dat als een Dirichlet-randvoorwaarde werkt, de convergentie gegarandeerd is als het *cfl*-getal in deze richting rond de eenheid ligt. Een bewijs van deze stelling kan niet gegeven worden, maar enkele voorbeelden worden gebruikt om deze stelling te staven.

Voor de experimentele verificatie, wordt een niet-viskeuze kanaalstroming beschouwd met een rooster-aspectverhouding gelijk aan één. Aan de inlaat wordt een uniforme stroming opgelegd en de druk wordt geëxtrapoleerd uit het stromingsveld. Aan de uitlaat wordt de druk opgelegd en de snelheden worden geëxtrapoleerd uit het stromingsveld. Aan de wanden worden de druk en de tangentiale snelheidscomponent geëxtrapoleerd en de normale snelheidscomponent wordt op nul gezet. Als initiële stromingsconditie wordt een verstoring opgelegd aan het snelheidsveld, zowel de tangentiale als de normale component wordt verschillend van nul genomen. Het rooster bezit 65 knopen in de x-richting (van inlaat naar uitlaat) en ook 65 knopen in y-richting (tussen de twee wanden).

Figuur 5.3 toont de convergentie van de punt- en lijnmethode op één enkel rooster (single grid, SG) en versneld met de multigridmethode (MG). Vijf roosters worden gebruikt in een W-cyclus voor de multigridmethode.

De multigrid-lijnmethode toont de beste convergentie wanneer deze uitgedrukt wordt in functie van werkeenheden. Op een Cartesisch rooster is de kost voor een

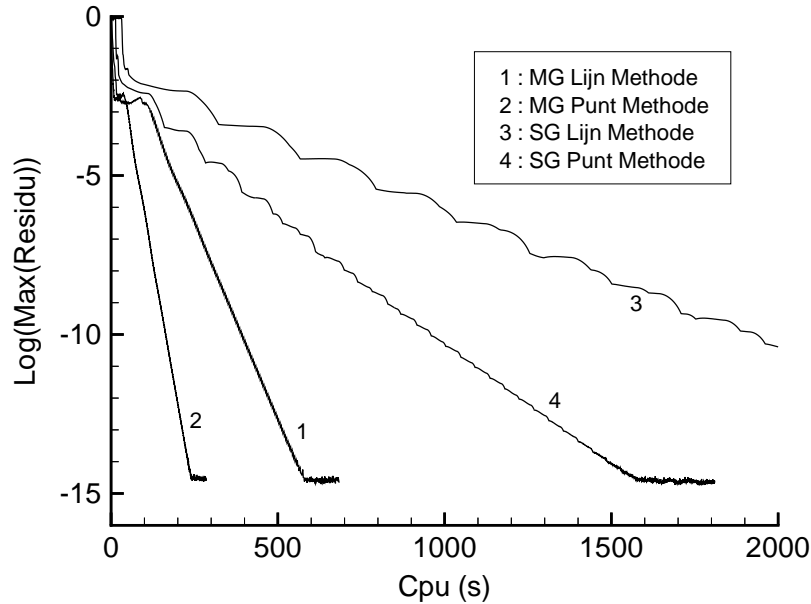


Figuur 5.3: Convergentieresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1$.

fluxberekening echter zeer goedkoop. Voor de puntmethode is de berekening van de 'update' ook zeer goedkoop. Voor de lijnmethode vergt de berekening van de 'update' het oplossen van een bloktridiagonaal stelsel. Daardoor is een werkeenheden van de puntmethode bijna drie maal sneller in CPU dan deze van de lijnmethode. Dit betekent dat voor dit testgeval de multigrid-puntmethode het snelst is. Dit wordt getoond in figuur 5.4. In het geval dat niet op een Cartesisch rooster gewerkt wordt is de fluxberekening reeds aanzienlijk duurder zodat de winst voor een werkeenheden in CPU heel wat kleiner is.

De goede performantie ondanks de alignering komt van de rol van de randvoorwaarden. Hier worden Dirichlet-randvoorwaarden gebruikt. De Dirichlet-randvoorwaarde aan de inlaat voor de snelheidscomponenten en de Dirichlet-randvoorwaarde aan de uitlaat voor de druk, samen met een sterke koppeling van de variabelen in de stromingsrichting elimineren de niet gedempte eigenvectorcombinatie loodrecht op de stromingsrichting. Dit effect is niet zichtbaar in de Fourier-analyse waar met periodieke randvoorwaarden gerekend wordt. De sterke koppeling in de stromingsrichting is een gevolg van de preconditionering. Zoals reeds werd opgemerkt, zijn met een gepaste keuze van β , de eigenwaarden van (5.20) van dezelfde grootte-orde. In dit geval komen de Fourier-symbolen voor gegeven θ_y en voor $\theta_x = \pi$ allemaal samen in een gebied waar goede demping kan bereikt worden. Dit is duidelijk op figuur 5.2.

Dit kan ook verklaren waarom in compressibele stroming om het even welke lokale tijdstapmethode goed werkt zolang het Mach-getal voldoende hoog is. Voor stromingen met laag Mach-getal, worden de convectieve eigenwaarden klein ten opzichte van



Figuur 5.4: Convergentieresultaten in CPU voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1$.

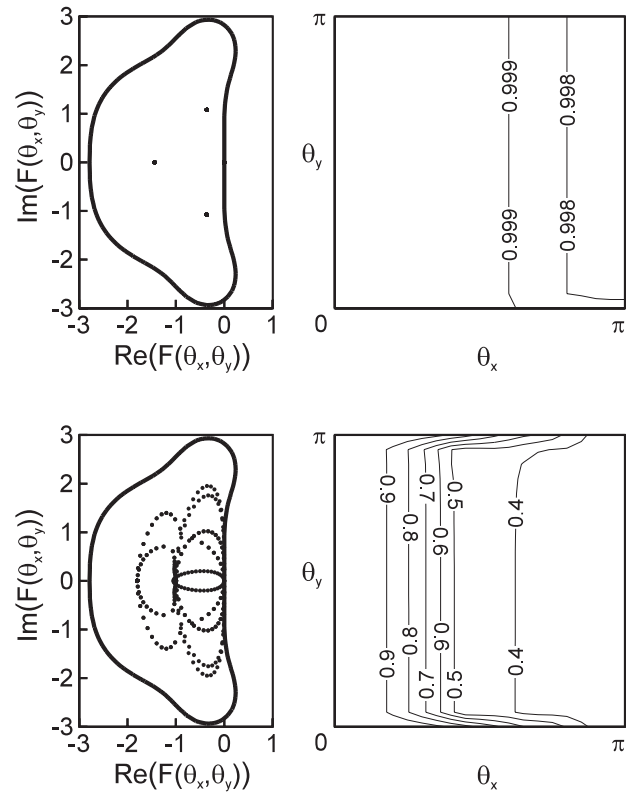
de akoestische en hierdoor wordt de convergentie vertraagd. Met een aangepaste preconditionering kan dit probleem opgelost worden, ondanks het feit dat in gealigneerde stroming de eigenwaarden in de richting loodrecht op de stroming toch een verschillende grootte-orde bezitten.

5.2.6b Niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$

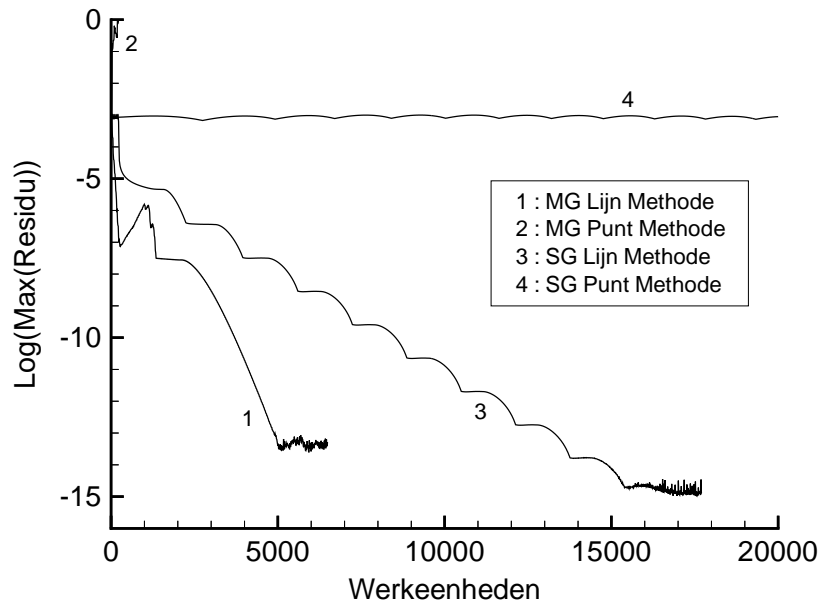
Figuur 5.5 toont de stabiliteitsresultaten voor deze stromingssituatie. Door de hoge rooster-aspectverhouding is de tijdstap klein voor de puntmethode omwille van de stabiliteit van de akoestische termen in de y-richting (zie §5.2.4b). In het ganse (θ_x, θ_y) vlak ligt de amplificatiefactor rond de eenheid. Hierdoor wordt de convergentie sterk verminderd.

Door gebruik te maken van de lijnmethode, met lijnen in de richting van de kleinste roosterafstanden (y-richting), verdwijnt de invloed van de aspectverhouding volledig. De convergentie voor dit geval is vergelijkbaar met de convergentieresultaten voor een rooster met aspectverhouding gelijk aan één.

Figuur 5.6 toont de convergentieresultaten voor dit testgeval. De lijnmethode werkt zeer goed, zowel op één enkel rooster als in de multigrid. De puntmethode vertoont bijna geen convergentie en zijn multigridformulering divergeert omdat er helemaal geen demping is.



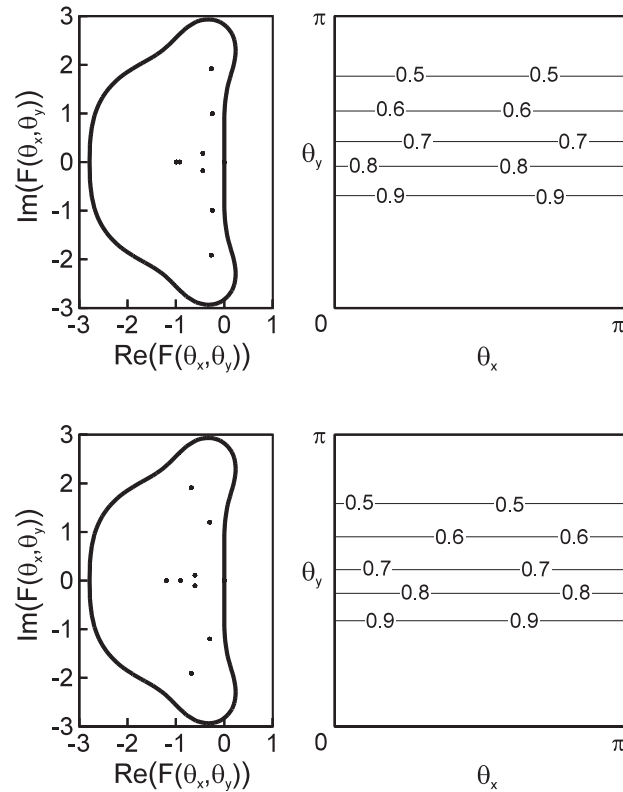
Figuur 5.5: Stabiliteitsresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1000$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.



Figuur 5.6: Convergentieresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1000$.

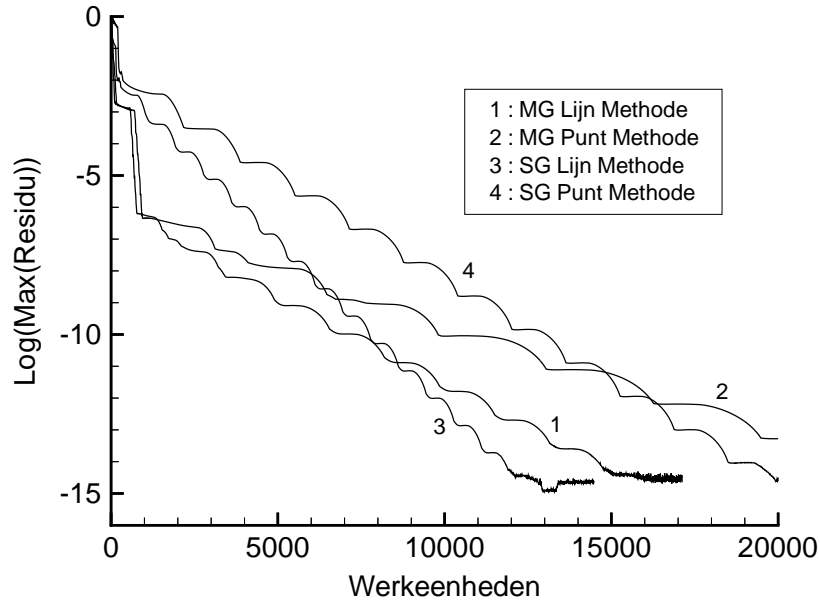
5.2.6c Niet-viskeuze stroming, gealigneerd aan de y-richting, met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$

Figuur 5.7 toont dat zowel punt- als lijnmethode zeer goede damping geven in de stroomrichting (hier de y-richting). De bepaling van de pseudo-tijdstap door (5.60) is in dit geval sterk afhankelijk van de convectieve snelheid v . De lijnmethode is stabiel voor een cfl -getal gelijk aan 1. Wanneer echter het cfl -getal gelijk wordt genomen aan 1.8 zoals in de vorige testgevallen, wordt de lijnmethode onstabiel. Door de schalingsfactor $\omega_1 = 2$ te nemen, verdwijnt de onstabieliteit. Zoals reeds vermeld is er een verschillende schaling van de convectieve termen u en v omdat beide snelheden anders behandeld worden in de berekening van de tijdstap voor de lijnmethode (5.60). De invoering van de schalingfactor kan gezien worden als een aanpassing van het globale cfl -getal aan het cfl -getal voor het convectieve subsysteem in de y-richting.



Figuur 5.7: Stabiliteitsresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de y-richting, $g_{ar} = 1000$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.

Het convergentieresultaat voor dit testgeval wordt getoond in figuur 5.8. Er is bijna geen verschil tussen de punt- en de lijnmethodes. Er is slechts een versnelling voor de multigridmethode voor de eerste residuhalving van zes grootte-orde. Nadien is er een terugval van de multigridperformantie ten opzichte van de performantie op het enkele rooster.

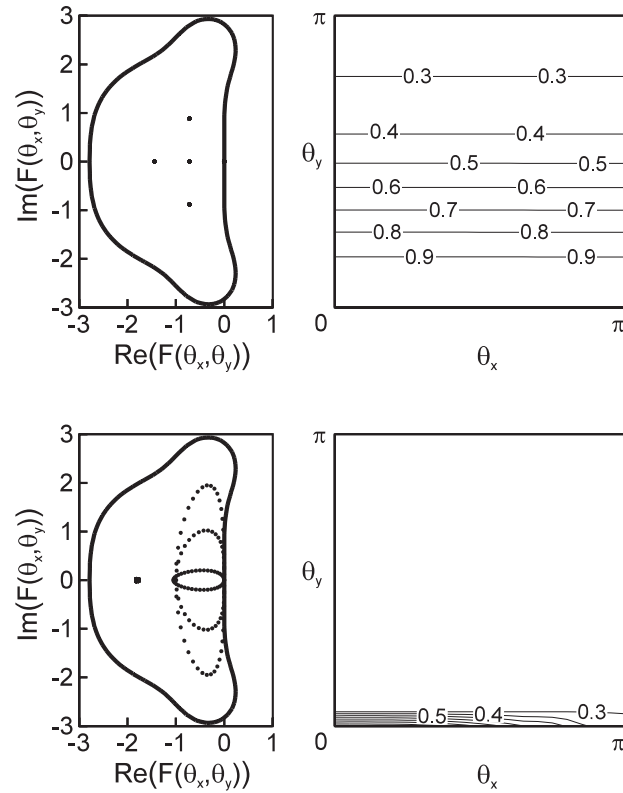


Figuur 5.8: Convergentieresultaten voor niet-viskeuze stroming gealigneerd aan de y-richting, $g_{ar} = 1000$.

5.2.6d Viskeuze stroming, gealigneerd aan de x-richting, met rooster-aspectverhouding 1000, $Re_{\Delta x}=100$

Figuur 5.9 toont dat voor de puntmethode een goede damping wordt bereikt in de y-richting. In stromingsrichting is er geen damping te wijten aan de te kleine tijdstap. Zoals reeds werd uitgelegd in §5.2.6a, kan goede convergentie bereikt worden met een Dirichlet-randvoorwaarde in de y-richting. Nu zijn echter drukrandvoorwaarden aan een vaste wand van het Neumann-type. Het drukniveau op lijnen in de y-richting moet bepaald worden door informatie-uitwisseling langsheen de x-richting, maar aangezien er geen damping is in deze richting, zal er bijna geen convergentie zijn. Voor de lijnmethode kan de tijdstap in x-richting veel groter gekozen worden zodat er goede damping is in beide richtingen.

Voor de experimentele verificatie wordt in dit testgeval de snelheid aan de onderste rand gelijk genomen aan nul. De bovenwand wordt verondersteld een symmetrievlak te zijn. De randvoorwaarde aan de bovenwand verandert dus niet in vergelijking met de vorige testgevallen. Aan de inlaat wordt in plaats van een uniform snelheidsprofiel een parabolisch snelheidsprofiel voorgeschreven. Er wordt op twee manieren een rooster geconstrueerd. Het eerste rooster heeft een rooster-aspectverhouding van 1000 in het ganse domein. Het tweede rooster heeft een rooster-aspectverhouding van 1000 aan de onderwand maar het rooster is gerekt naar de bovenwand toe zodat de rooster-aspectverhouding aan de bovenwand gelijk is aan 1.

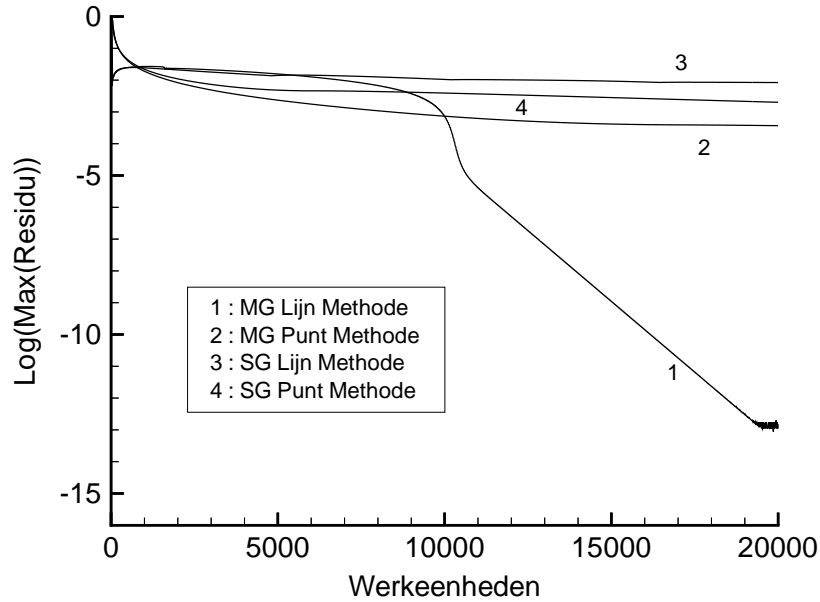


Figuur 5.9: Stabiliteitsresultaten voor viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1000$, $\text{Re}_{\Delta x} = 100$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.

Figuur 5.10 toont de convergentieresultaten voor het eerste rooster. De multigrid-lijnmethode toont een trage convergentie in het begin. Dit komt waarschijnlijk door het feit dat tijdens de initiële convergentiefase de snelheid niet gealigneerd is aan het rooster. Het verschil met de vorige testgevallen is het parabolisch inlaatprofiel, dat relatief grote snelheden in y-richting veroorzaakt in het begin van de berekening. Indien bijvoorbeeld v slechts één tiende van u is, moet de stroming als bijna gealigneerd met de y-richting gezien worden aangezien

$$\frac{u}{v} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 100 \gg 1. \quad (5.67)$$

In dat geval is er geen goede damping in x-richting, de richting loodrecht op de stroming (de damping wordt gegeven in figuur 5.7). Het gebrek aan damping in de x-richting is te wijten aan het feit dat de convectieve termen expliciet behandeld worden, ook in de lijnmethode. Daarom, als er een belangrijke v -component is, wordt de tijdstap bepaald door deze v -component (5.60) en is het mogelijk dat het cfl -getal in de x-richting klein wordt. Enkel indien de stroming voldoende gealigneerd is, is het



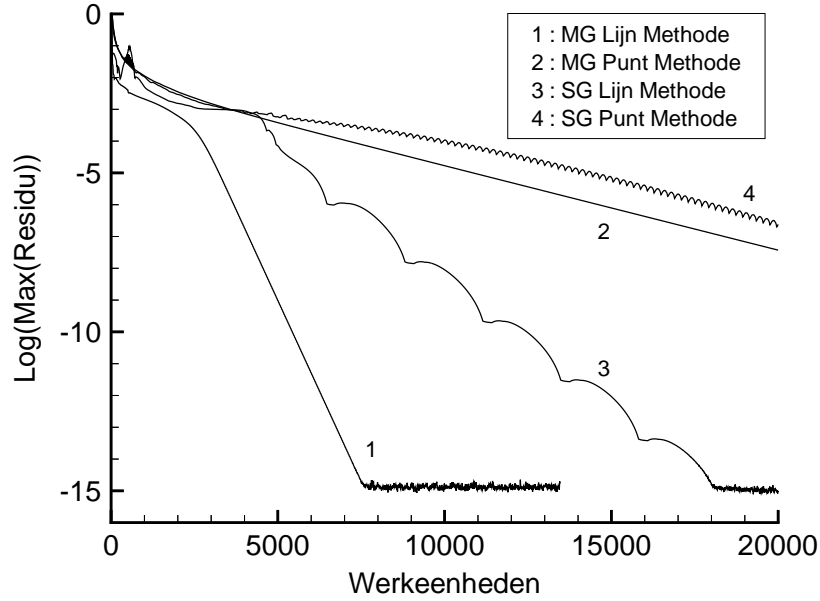
Figuur 5.10: Convergentieresultaten voor viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1000$.

cfl -getal in stromingsrichting voldoende groot. Dit gebeurt in dit testgeval wanneer het residu voldoende gedaald is. Vanaf dan vertoont de multigrid-lijnmethode een normaal convergentiegedrag. Om bovenstaand euvel te verhelpen zouden de convectieve termen gelineariseerd kunnen worden en ook behandeld worden in de lijnmethode. Het nadeel is dan dat elke iteratie de linearisatie moet herberekend worden, zodat de LU-decompositie van het bloktridiagonaal stelsel opnieuw moet berekend worden, terwijl nu enkel de 'backs substitutie' opnieuw berekend wordt. Deze winst in tijd wordt verder nog behandeld.

Zoals hierboven al werd bediscussieerd, is er een sterke koppeling in y-richting door de hoge rooster-aspectverhouding. De amplificatiefactor is beduidend kleiner dan 1, vergeleken met figuur 5.5, door het belang van de viskeuze termen. De drukrandvoorwaarden zijn echter in deze richting Neumann-randvoorwaarden, zowel voor de onderwand als de bovenwand. Daarom moet het drukk niveau bepaald worden door de naburige lijnen in x-richting, waar er een zeer zwakke koppeling is in het geval van de puntmethode. Dit verklaart waarom er bijna geen convergentie is bij de puntmethode.

Een stromingssituatie waarbij het rooster over de gehele hoogte een grote aspectverhouding behoudt, komt bijna nooit voor. Meestal wordt gebruik gemaakt van gerechte roosters waarbij de hoge aspectverhouding overgaat in een lagere. De convergentieresultaten van dit testgeval waarvoor het tweede rooster wordt gebruikt, worden getoond in figuur 5.11. In het gebied van de hoge aspectverhouding is er dan goede demping in de y-richting, zoals hierboven reeds gezegd. In het gebied met de lagere aspectverhouding is er demping in alle richtingen, zodat bijvoorbeeld het drukk niveau

uit hogergenoemd voorbeeld hier wel bepaald is door informatie-uitwisseling in de x-richting. Dit gebied ageert eigenlijk als een soort Dirichlet-randvoorwaarde voor het onderliggende gebied met hoge rooster-aspectverhouding. Daarom is de convergentie goed, zelfs voor de puntmethode.



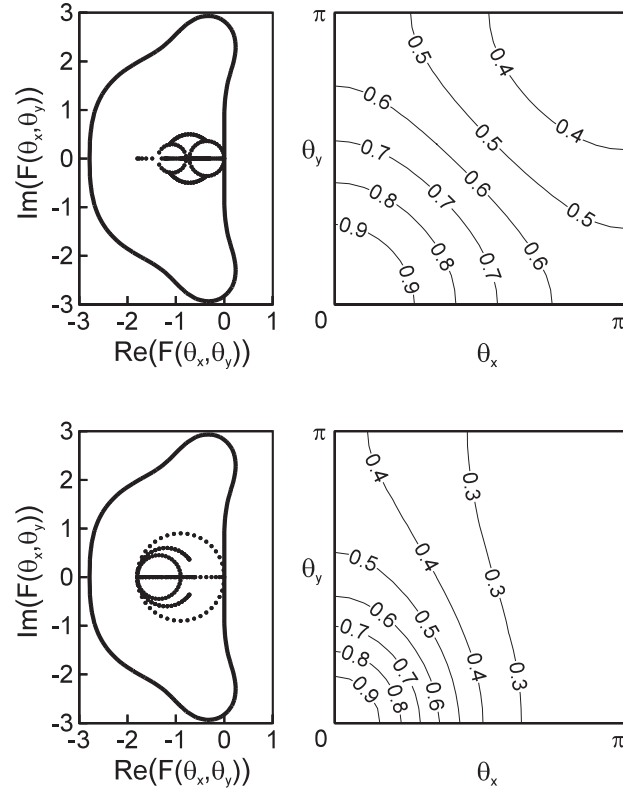
Figuur 5.11: Convergentieresultaten voor viskeuze stroming gealigneerd aan de x-richting, $g_{ar} = 1000$ aan de onderste wand, $g_{ar} = 1$ aan de bovenwand.

5.2.6e Viskeuze stagnatiezone met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1$

We beschouwen nu het geval met $u = v = 0$. Figuur 5.12 toont dat er een goede damping is in zowel de x- als de y-richting en dit voor zowel de punt- als de lijnmethode. Omwille van stabiliteitseisen worden de schalingsfactoren ω_2 en ω_3 gelijk genomen aan respectievelijk 1.5 en 1 voor de puntmethode. Voor de lijnmethode worden zowel ω_2 als ω_3 gelijk genomen aan 1.

De invoering van deze schalingsfactoren is nodig omdat de viskeuze termen een ander Fourier-symbool vertonen dan de convectieve termen. Het Fourier-symbool van de viskeuze termen ligt immers op de negatieve x-as in het Fourier-vlak en voor een cfl -getal van 1.8 ligt het symbool buiten het stabiliteitsgebied van de multitrappmethode. Met de schalingsfactoren wordt het globale cfl -getal van 1.8 aangepast aan een geschikt cfl -getal voor de artificiële dampingsterm en de viskeuze termen. Het gebruik van de term cfl -getal voor de viskeuze termen lijkt een beetje vreemd, maar indien een lokale diffusiesnelheid v_d gezien wordt als

$$v_d = \frac{2\nu}{\Delta x}, \quad (5.68)$$



Figuur 5.12: Stabiliteitsresultaten voor viskeuze stagnatiezone, $g_{ar} = 1$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.

dan is een cfl -getal berekend op deze snelheid gelijk aan het viskeuze stabiliteitsgetal σ

$$cfl = \frac{v_d \Delta \tau}{\Delta x} = \frac{2\nu \Delta \tau}{\Delta x^2} = \sigma. \quad (5.69)$$

Eerst wordt de keuze van ω_2 en ω_3 toegelicht in het geval van de puntmethode. Met $u = v = 0$ en voor $\theta_x = \theta_y = \pi$ worden de matrices \hat{P} (5.63) en \hat{C} (5.46) gegeven door

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{P}_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

$$\hat{P}_{11} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2} + \omega_2 \right), \quad (5.71)$$

$$\hat{P}_{22} = \hat{P}_{33} = 2\nu (1 + \omega_3) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + \frac{4\nu}{\Delta x \Delta y}, \quad (5.72)$$

en

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 4\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 4\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Voor een grote rooster-aspectverhouding en met $\omega_2 = 1.5$ en $\omega_3 = 1$, wordt $-\hat{P}^{-1}\hat{C}$ gegeven door

$$-\hat{P}^{-1}\hat{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

zodat voor een globaal cfl -getal van 1.8 alle eigenwaarden samenvallen in het complexe vlak in het punt $(-1.8, 0)$, waar goede demping is. In het geval met een rooster-aspectverhouding gelijk aan 1, wordt $-\hat{P}^{-1}\hat{C}$ gegeven door

$$-\hat{P}^{-1}\hat{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

en ook in dit geval liggen alle eigenwaarden in een gebied van het complexe vlak waar goede demping is.

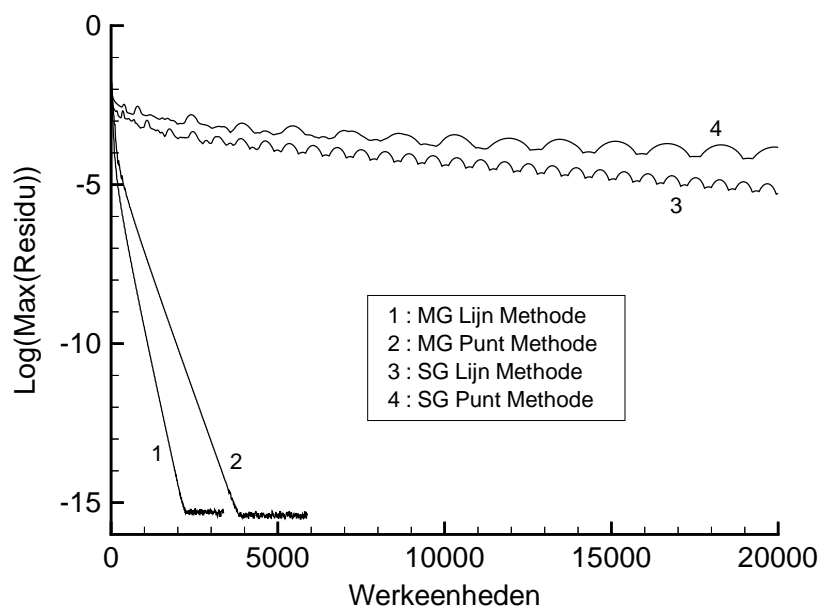
Voor de lijnmethode, met $u = v = 0$ en $\theta_x = \theta_y = \pi$, wordt de \hat{C} -matrix ook gegeven door (5.73). De \hat{P} -matrix (5.57) wordt gegeven door

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} \left(\frac{3}{2} + \frac{\omega_2}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 2\nu(1 + \omega_3) \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{4\nu}{\Delta y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu(1 + \omega_3) \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{4\nu}{\Delta y^2} \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

Voor $\omega_2 = \omega_3 = 1$, is de \hat{P} -matrix identiek aan de \hat{C} -matrix, zodat, onafhankelijk van de rooster-aspectverhouding $-\hat{P}^{-1}\hat{C}$ gegeven wordt door (5.74). De eigenwaarden

liggen in een gebied waar goede damping is voor $cfl = 1.8$. Er kan opgemerkt worden dat de precieze waarden van ω_2 en ω_3 niet zo kritisch zijn. Zo wordt bijvoorbeeld voor de puntmethode ook goede damping bereikt voor $\omega_2 = \omega_3 = 1$. In feite is het dikwijls voordelig om de factoren niet te groot te kiezen. Het is belangrijk dat het cfl -getal eerder aan de grote kant is omdat de convergentiesnelheid niet alleen bepaald wordt door de damping van de foutcomponenten maar ook door eliminatie van deze componenten door convectie uit het stromingsveld. Daarom kan als algemene regel, ω_2 en ω_3 gelijk gesteld worden aan de eenheid. Deze waarden worden gebruikt in de convergentietesten.

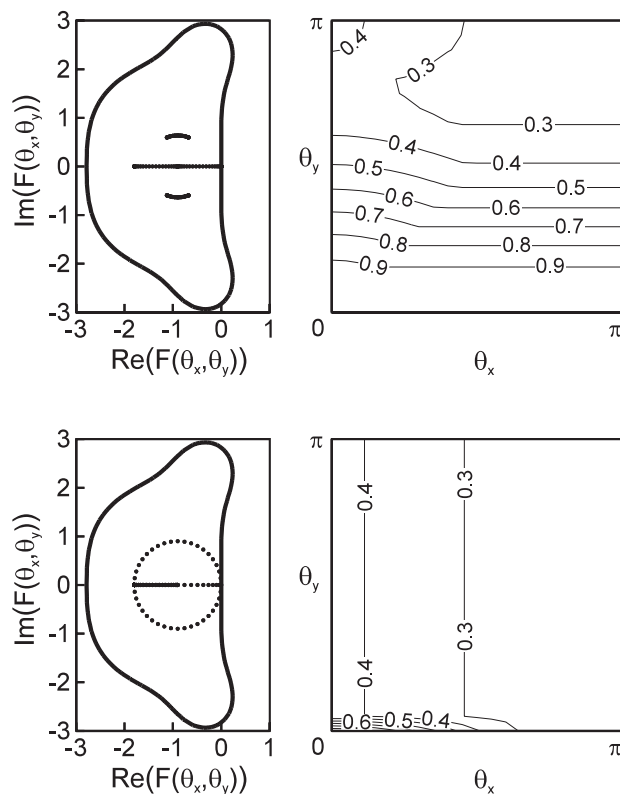
Figuur 5.13 toont de convergentieresultaten voor de viskeuze stagnatiezone. Zowel de punt- als de lijnmethode hebben een goede performantie. De multigridformulering van beide methodes toont een zeer sterke acceleratie van de convergentie. Dit is niet vreemd aangezien in dit geval de vergelijkingen bijna gereduceerd worden naar de vergelijking van Laplace voor elke variabele u , v en p . En het is algemeen geweten dat multigrid in dit geval zeer goed werkt.



Figuur 5.13: Convergentieresultaten voor een viskeuze stagnatiezone, $g_{ar} = 1$.

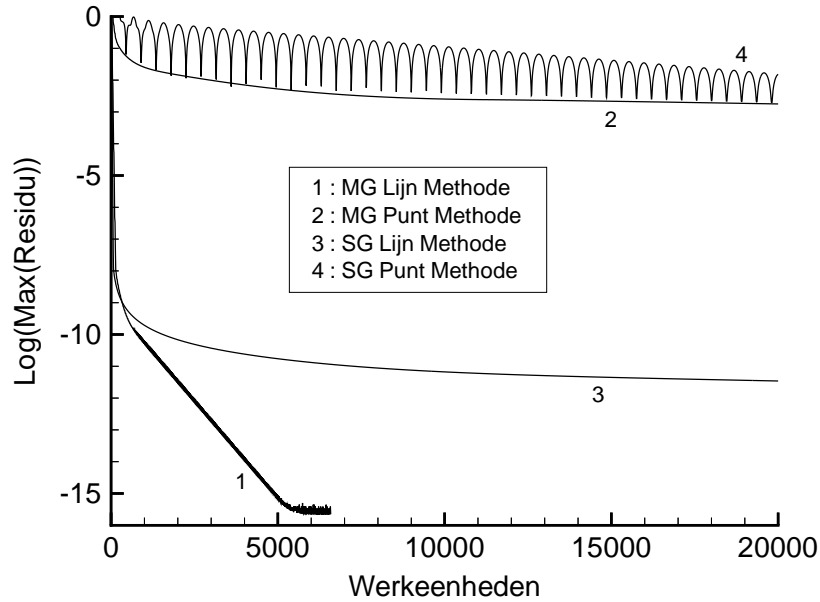
5.2.6f Viskeuze stagnatiezone met rooster-aspectverhouding $g_{ar}=1000$

Opnieuw worden in de Fourier-analyse de schalingsfactoren ω_2 en ω_3 gelijk genomen aan 1.5 en 1 voor de puntmethode. Voor de lijnmethode is $\omega_2 = \omega_3 = 1$. Figuur 5.14 toont dat er alleen een goede damping is in de y-richting voor de puntmethode. Voor de lijnmethode is er een goede damping in beide richtingen.



Figuur 5.14: Stabiliteitsresultaten voor viskeuze stagnatiezone, $g_{ar} = 1000$. Links : Fourier-symbolen in het complexe vlak. Rechts : amplificatiefactor. Boven : puntmethode. Onder : lijnmethode.

De experimentele verificatie in figuur 5.15 toont een slechte convergentie voor de puntmethode. Er is een goede damping in de y-richting maar in deze richting is er een Neumann-randvoorwaarde voor de druk. Daardoor is de convergentie toch slecht. De lijnmethode vertoont een goede convergentie. Dit komt overeen met de verwachtingen aangezien er een goede damping is voor de lijnmethode in beide richtingen.



Figuur 5.15: Convergentieresultaten voor een viskeuze stagnatiezone, $g_{ar} = 1000$.

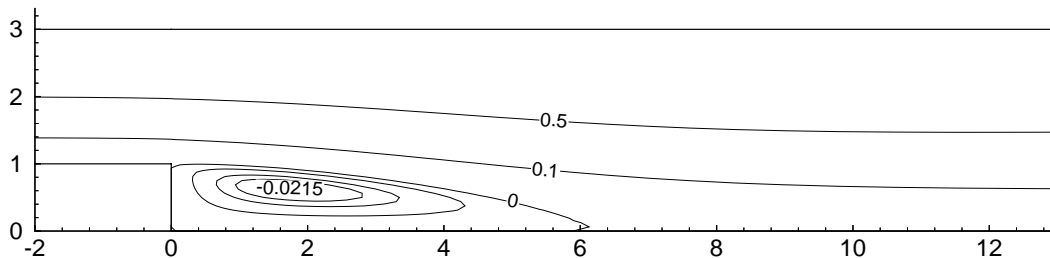
5.2.7 'Backward facing step'

Voorgaande methode wordt getest op een 'backward facing step'. De hoogte van de stap wordt gekozen als een derde van de hoogte van het kanaal. Twee roosters worden beschouwd. Het eerste rooster heeft 81 bij 49 knopen en het tweede rooster heeft er 81 bij 193. Beide roosters hebben dezelfde verdeling van knopen in de x-richting. In de y-richting heeft het tweede rooster vier maal meer cellen dan het eerste. De grootste rooster-aspectverhouding op het eerste rooster is 35 en op het tweede rooster 140. Dezelfde multigridmethode wordt gebruikt als in de generieke testgevallen, alleen worden er slechts vier roosters gebruikt in plaats van vijf.

Figuur 5.16 toont het stroomlijnpatroon bekomen op het eerste rooster, voor een Reynoldsgetal

$$Re_h = \frac{U_{max}h}{\nu} = 150, \quad (5.77)$$

waarbij h de hoogte van de stap aanduidt en U_{max} de grootste waarde van de snelheid aan de inlaatsectie voorstelt. De stroomlijnen worden bekomen door integratie van het berekende snelheidsprofiel en dimensieloos gemaakt door deling door het inlaatdebiet, zodat de waarde die bij de stroomlijn aan de bovenste wand gelijk is aan 1. De verhouding van de heraanhechtingslengte tot de hoogte van de stap is ongeveer gelijk aan 6. Dit resultaat komt overeen met de experimentele waarde [85].

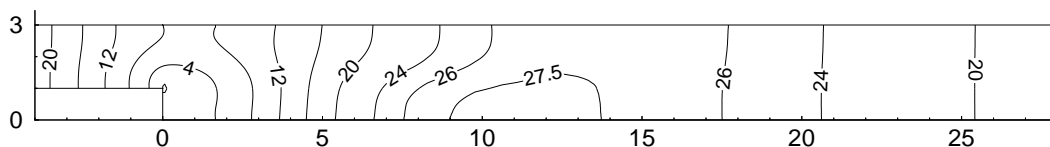


Figuur 5.16: Stroomlijnpatroon voor de 'backward facing step', bekomen op het fijnste rooster.

Figuur 5.17 toont de isobaren, dimensieloos gemaakt als volgt

$$\bar{p} = Re_h \frac{p - p_c}{1/2 \rho U_{max}^2}, \quad (5.78)$$

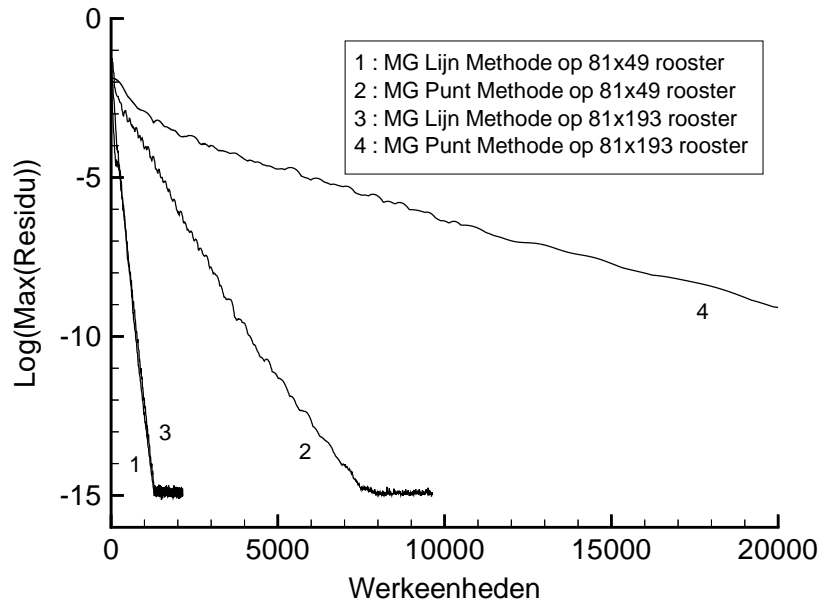
waarbij p_c de druk aan de hoek van stap voorstelt, waar het snelheidsveld loslaat.



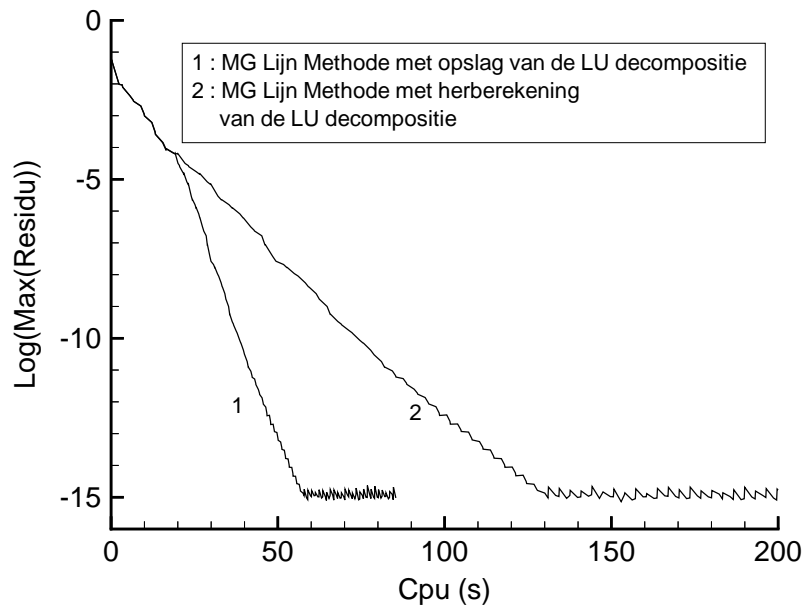
Figuur 5.17: Isobaren voor de 'backward facing step'.

Figuur 5.18 toont het convergentieverloop van de multigrid-punt- en -lijnmethode op de twee roosters met verschillende aspectverhouding. Het is duidelijk dat voor de lijnmethode er geen invloed is van de aspectverhouding op de performantie van de methode. Voor de puntmethode echter wordt de convergentie slechter naarmate de aspectverhouding toeneemt.

De computationele kost is bijzonder klein voor deze methode. Wanneer het residu enkele grootte-orde is gedaald, kan de niet-lineaire preconditioneringsmatrix vastgehouden worden. Alle andere termen in het stelsel (5.29) zijn lineaire termen. Dit betekent dat de LU decompositie nodig om het tridiagonale blokstelsel op te lossen, kan opgeslagen worden voor de verschillende roosters in de multigrid. De computationele kost voor een fluxevaluatie is ook zeer klein aangezien de Jacobianen van de lineaire termen ook opgeslagen worden. Daarom moet voor één pseudo-tijdstap enkel de niet-lineaire convectieve termen herberekend worden en moet er enkel een 'backsubstitutie' uitgevoerd worden voor de berekening van één pseudo-tijdstap in het multitrapschema. De winst in performantie door het gebruik van deze methode wordt getoond in figuur 5.19.



Figuur 5.18: Convergentieresultaten voor de 'backward facing step', vergelijking van de multigrid-punt- en -lijnmethode op twee verschillende roosters.



Figuur 5.19: Convergentieresultaten voor de 'backward facing step', vergelijking van de multigrid-lijnmethode met herberekening van de LU decompositie gedurende elke pseudo-tijdstap en van de multigrid-lijnmethode met opslag van de LU decompositie nadat het residu enkele ordes is gedaald.

5.3 Discretisatie van de compressibele stromingsvergelijkingen met laag Mach-getal

5.3.1 Inleiding

De discretisatiemethode die hierboven werd voorgesteld voor incompressibele stroming kan op een zeer eenvoudige wijze uitgebreid worden naar een discretisatiemethode voor compressibele stroming met laag Mach-getal.

De pseudo-compressibiliteitsmethode zorgt ervoor dat de pseudo-akoestische en convectieve transportsnelheden van dezelfde grootte-orde zijn. Om hetzelfde te bereiken voor het compressibele geval kan gebruik gemaakt worden van om het even welke preconditioneringsmethode die de akoestische snelheden naar de convectieve schaaft. In dit werk wordt een preconditioneringsmatrix gebaseerd op deze van Weiss en Smith [150] gebruikt maar vereenvoudigd door de termen waar zichtbaar een snelheidscomponent in voorkomt te schrappen. Hierdoor zijn de eigenwaarden van het gepreconditioneerde systeem niet meer analytisch neer te schrijven, maar numeriek blijken ze van dezelfde grootte-orde te zijn. Door deze aanpak is het duidelijk welke artificiële dissipatietermen er minimaal dienen toegevoegd te worden.

De gebruikte preconditioneringsmatrix voor de compressibele vergelijkingen wordt gegeven door :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ \Theta H - 1 & 0 & 0 & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

waarbij Θ gegeven wordt door

$$\Theta = \frac{1}{\beta^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \quad (5.80)$$

en waarbij ρ_T de afgeleide van de soortelijke massa naar de temperatuur voorstelt. Deze preconditioneringsmatrix wordt gebruikt om de zogenaamde viskeuze variabelen Q_v te stappen in pseudo-tijd. Deze viskeuze variabelen Q_v zijn

$$Q_v = [p \quad u \quad v \quad T]^T, \quad (5.81)$$

waarbij T de temperatuur aanduidt. Met superscript T wordt de getransponeerde vector bedoeld.

Verder wordt opnieuw een semi-impliciete discretisatiemethode gebruikt in de richting van de kleinste roosterafstanden. De gebruikte vergelijkingen en discretisatiemethode worden hierna behandeld.

5.3.2 Compressibele vergelijkingen

Beschouwen we de stationaire compressibele Navier-Stokes-vergelijkingen in vectorvorm, dan kunnen deze voor een tweedimensionale ruimte geschreven worden als :

$$\frac{\partial F_{nv}}{\partial x} + \frac{\partial G_{nv}}{\partial y} - \frac{\partial F_v}{\partial x} - \frac{\partial G_v}{\partial y} = 0, \quad (5.82)$$

waarbij

$$F_{nv} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ \rho u H \end{pmatrix}, \quad G_{nv} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ \rho v H \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + q_y \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

De componenten van de spanningstensor $\underline{\tau}$ en de warmtevloedvector \underline{q} worden gegeven door :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ q_x &= \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ q_y &= \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Hierbij is H de totale enthalpie :

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (5.86)$$

en μ de dynamische viscositeit. Pr stelt het getal van Prandtl voor.

5.3.3 Discretisatie van het niet-viskeuze subsysteem

Overeenkomstig met het incompressibel geval worden de convectieve delen uit de impulsvergelijking 'upwind' gediscetiseerd volgens de snelheidscomponenten :

$$F_{c_{i+1/2}} = u_{i+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \\ 0 \end{bmatrix}_{L/R}, \quad G_{c_{j+1/2}} = v_{j+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \\ 0 \end{bmatrix}_{L/R}. \quad (5.87)$$

De verklaring voor de indices komt overeen met deze in §5.2.3.

De drukterm in de impulsvergelijking en de snelheidstermen in de continuïteits- en energievergelijking worden behandeld als het pseudo-akoestisch deel in het incompressibel geval en worden centraal gediscetiseerd :

$$F_{a_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p \\ 0 \\ \rho H u \end{bmatrix}_{i+1/2}, \quad G_{a_{j+1/2}} = \begin{bmatrix} \rho v \\ 0 \\ p \\ \rho H v \end{bmatrix}_{j+1/2}. \quad (5.88)$$

De invoering van de artificiële dissipatietermen gebeurt op basis van de vorm van de gebruikte preconditioneringsmatrix (5.79). Voor lage snelheden verdwijnt de term Γ_{44} , zodat de energievergelijking verantwoordelijk is voor de bepaling van de druk in pseudo-tijd.

Het is ook deze vergelijking die ervoor zorgt dat de divergentie van het snelheidsveld $\nabla \cdot \underline{u}$ naar nul gedreven wordt voor kleine snelheden. Dit kan als volgt gezien worden. Er blijkt uit de impulsvergelijkingen dat ∇p met een factor M^2 schaaft. Wanneer de energievergelijking geschreven wordt als

$$\nabla \cdot (\rho H \underline{u}) = \rho H \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot (\rho H) = 0, \quad (5.89)$$

met

$$\rho H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \quad (5.90)$$

en $\gamma = C_p/C_v$, blijkt dat de tweede term schaalt volgens M^3 zodat ook $\nabla \cdot \underline{u}$ schaalt volgens M^3 . Dit toont aan dat $\nabla \cdot \underline{u}$ naar nul gedreven wordt door de energievergelijking. Verder kan opgemerkt worden dat uit de continuïteitsvergelijking

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = \rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (5.91)$$

volgt dat $\nabla \rho$ schaalt volgens M^2 . Uit

$$\nabla p = RT \nabla \rho + R \rho \nabla T, \quad (5.92)$$

volgt dan dat ∇T ook schaalt volgens M^2 .

De dissipatieterm die werd ingevoerd in de continuïteitsvergelijking in het incompressibele geval moet daarom ingevoerd worden in de energievergelijking. Deze term dient voorvermenigvuldigd te worden met de enthalpie om de juiste dimensie te hebben :

$$F_{d1_{i+1/2}} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{\beta_x} \end{bmatrix}, \quad G_{d1_{j+1/2}} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{j+1/2} \frac{p_{j+1} - p_j}{\beta_y} \end{bmatrix}. \quad (5.93)$$

Uit (5.79) volgt dat de continuïteitsvergelijking voor een 'update' zorgt van zowel druk als temperatuur. Zonder preconditionering zou dit ook het geval zijn aangezien de continuïteitsvergelijking normaal gezien gebruikt wordt om de soortelijke massa te bepalen. Bijgevolg zou een dissipatieterm voor de soortelijke massa moeten toegevoegd worden van de vorm

$$F_{d2_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} |w_r| (\rho_{i+1} - \rho_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{d2_{j+1/2}} = \begin{bmatrix} |w_r| (\rho_{j+1} - \rho_j) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.94)$$

wat zou leiden tot een dissipatieterm voor de druk en de temperatuur aangezien viskeuze variabelen gebruikt worden. De verhouding tussen beide dissipatietermen wordt echter geïnspireerd op de verhouding van beide termen in de preconditioneringsmatrix, zodat uiteindelijk gekozen wordt voor

$$F_{d2_{i+1/2}} = \delta \begin{bmatrix} \frac{p_{i+1} - p_i}{\beta_x} + |w_r| \rho_T (T_{i+1} - T_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

en

$$G_{d2_{j+1/2}} = \delta \begin{bmatrix} \frac{p_{j+1} - p_j}{\beta_y} + |w_r| \rho_T (T_{j+1} - T_j) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.96)$$

5.3.4 Discretisatie van het viskeuze subsysteem

Als voorbeeld voor de discretisatie van het viskeuze subsysteem wordt de term τ_{xx} in de x-impulsvergelijking uitgewerkt. De bijdrage van τ_{xx} voor de zijde $i + 1/2$ van het controlevolume uit figuur 5.1 kan geschreven worden als

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.97)$$

Voor deze zijde waarvan de normale in x-richting gelegen is wordt de afgeleide in x-richting de normale afgeleide genoemd en de afgeleide in y-richting de tangentiale afgeleide. In het geval van de incompressibele vergelijkingen waren er enkel normale afgeleiden aanwezig en deze werden centraal gediscrètiseerd. Daarom nemen we ook nu een centrale discretisatie van deze afgeleide

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}. \quad (5.98)$$

De tangentiale afgeleide wordt als volgt gediscrètiseerd :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2}}{y_{i+1/2,j+1/2} - y_{i+1/2,j-1/2}}, \quad (5.99)$$

waarbij $v_{i+1/2,j+1/2}$ berekend wordt als

$$v_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} (v_i + v_{i+1} + v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}) \quad (5.100)$$

en de andere termen worden op gelijkaardige manier berekend.

5.3.5 Discretisatie in de pseudo-tijd

De discretisatie in de tijd gebeurt met de preconditioneringsmatrix (5.79).

Verder wordt opnieuw de akoestische flux (5.88) impliciet behandeld in de richting van de kleinste roosterafstand. Aangezien de flux niet-lineaire termen bevat is er een linearisatie nodig voor deze termen. Naar analogie met de incompressibele vergelijkingen kan de akoestische flux op tijdstip $n + 1$ geschreven worden als :

$$G_{a_{j+1/2}}^{n+1} = \begin{bmatrix} \rho^n v^{n+1} \\ 0 \\ p^{n+1} \\ \rho^n H^n v^{n+1} \end{bmatrix}_{j+1/2} . \quad (5.101)$$

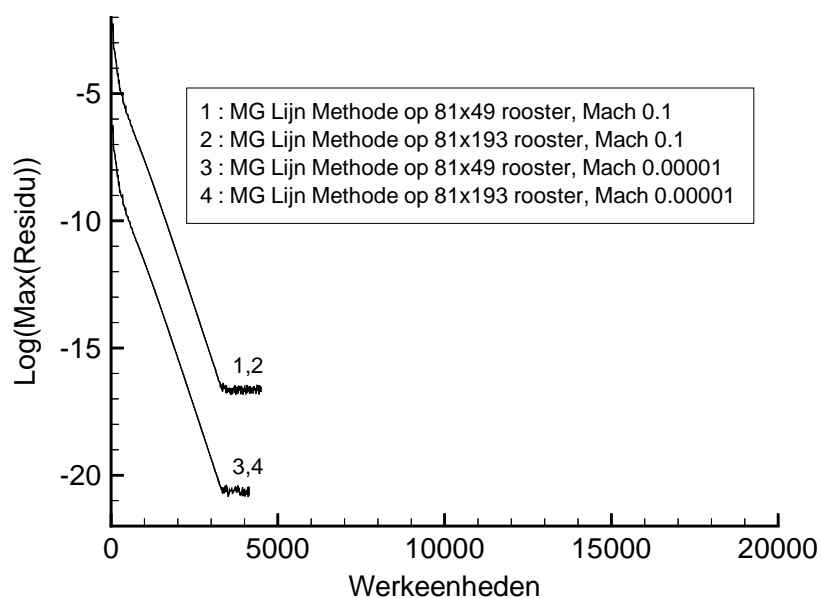
Tenslotte worden de normale viskeuze fluxen behandeld zoals de viskeuze fluxen in het incompressibele geval. Dit betekent opnieuw een impliciete behandeling in de richting van de kleinste roosterafstand. De tangentiale viskeuze fluxen worden expliciet behandeld.

Er werd geen aparte stabiliteitsanalyse uitgevoerd voor deze toepassing. Er bleek dat het *cfl* getal diende verlaagd te worden tot een waarde van 1.6.

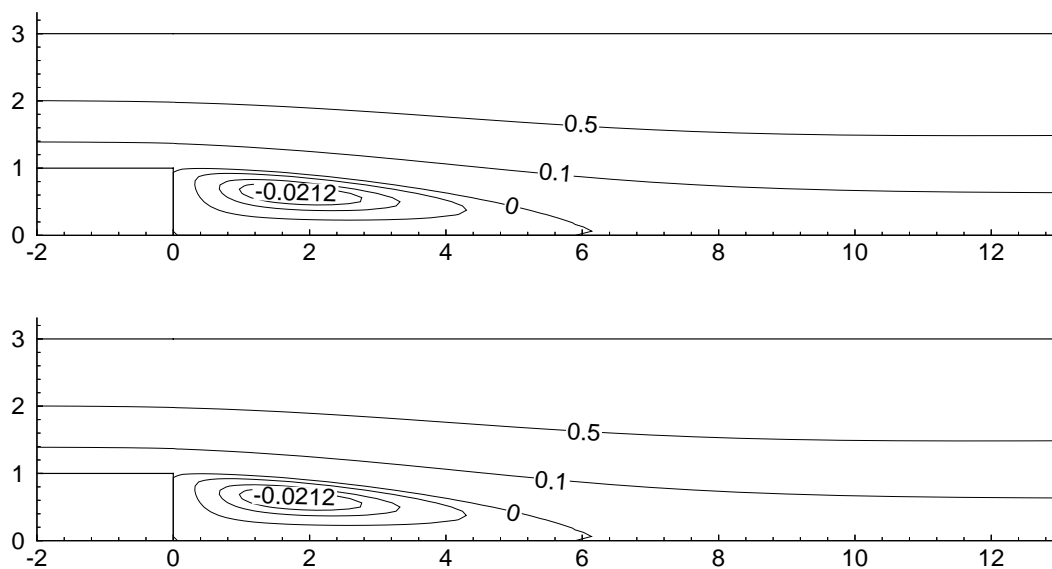
5.3.6 Berekening op een 'backward facing step'

Dezelfde roosters als voor de incompressibele stromingsberekening worden gebruikt. Voor elk rooster wordt een berekening gemaakt bij Mach 0.1 en bij Mach 10^{-5} . Figuur 5.20 toont de verschillende convergentieresultaten.

Figuur 5.21 toont de stroomlijnpatronen voor de twee Mach-getallen. Er zijn geen verschillen te merken tussen de twee stroomlijnpatronen. Wanneer de stroomlijnpatronen vergeleken worden met die van de incompressibele berekening (figuur 5.16), kunnen ook geen verschillen gezien worden.

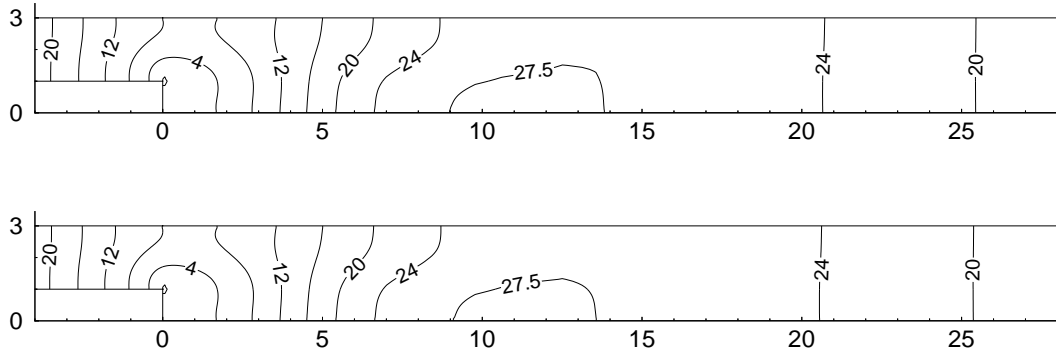


Figuur 5.20: Convergentieresultaten voor de compressibele 'backward facing step', vergelijking van de multigrid-lijnmethode op twee verschillende roosters voor verschillende Mach-getallen.



Figuur 5.21: Stroomlijnpatroon voor de 'backward facing step'. Boven Mach 10^{-1} . Onder Mach 10^{-5} .

Figuur 5.22 toont de dimensieloze isobaren voor beide Mach-getallen berekend volgens (5.78). Er kan hier ook geen verschil gezien worden tussen deze figuren en tussen het incompressibele geval (figuur 5.17). Dit toont aan dat drukverschillen schalen met M^2 .

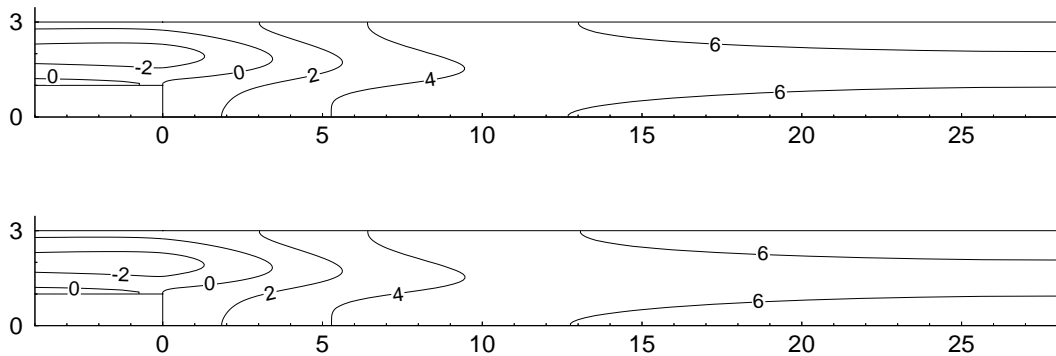


Figuur 5.22: Isobaren voor de 'backward facing step'. Boven Mach 10^{-1} . Onder Mach 10^{-5} .

Figuur 5.23 toont de isothermen voor beide Mach-getallen. Aan de inlaat ($x=-10$) wordt een uniform temperatuursveld opgelegd. De temperaturen worden dimensieloos gemaakt als volgt

$$\overline{T} = Re_h \frac{R(T - T_c)}{U_{max}^2}, \quad (5.102)$$

waarbij T_c de temperatuur aan de hoek van stap voorstelt. Hieruit volgt dat temperatuursverschillen schalen volgens M^2 .



Figuur 5.23: Isothermen voor de 'backward facing step'. Boven Mach 10^{-1} . Onder Mach 10^{-5} .

5.4 Discretisatie op niet-gestructureerde bewegende axisymmetrische roosters

5.4.1 Inleiding

De vergelijkingen die de niet-stationaire stroming van een incompressibel fluïdum beschrijven zijn de Navier-Stokes-vergelijkingen en de continuïteitsvergelijking. Voor een bewegend controlevolume worden het behoud van massa en impuls geschreven als

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV + \int_S (\underline{v} - \underline{v}_b) \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (5.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_S \left(\rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}_b) + p' \underline{I} - \underline{\tau} \right) \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (5.104)$$

Hier is ρ de soortelijke massa, \underline{v} de snelheidsvector van het fluïdum in een stilstaand coördinatenstelsel, \underline{v}_b de snelheidsvector van de rand S van het controlevolume V , \underline{n} de uitwendige normale op de rand, $\frac{\partial}{\partial t}$ de afgeleide naar de tijd, p de druk, \underline{I} de eenheidstensor, $\underline{\tau}$ de viskeuze-spanningstensor gedefinieerd voor een Newtoniaans fluïdum door $\underline{\tau} = 2\mu\underline{\gamma}$ met $\underline{\gamma}$ de glijdingstensor $\gamma_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ en μ de dynamische viscositeit.

De snelheden \underline{v}_b moeten voldoen aan de ruimtelijke-conservatiewet

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV - \int_S \underline{v}_b \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (5.105)$$

Dan kan (5.103) geschreven worden als

$$\int_S \underline{v} \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (5.106)$$

De toestandsvector wordt gegeven door

$$Q = \begin{bmatrix} p' \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad (5.107)$$

waarbij u en v de Cartesische snelheidscomponenten zijn en $p' = p/\rho$ de kinematische druk.

Voor de tijdsintegratie van (5.104) wordt een gereduceerde toestandsvector gedefinieerd als $W = J Q$, met

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.108)$$

De vergelijkingen (5.103) en (5.104) kunnen samen geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV + \int_S \underline{F} \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (5.109)$$

met \underline{F} de fluxvector met bijdragen van de convectieve, \underline{F}_c , en de diffusieve, \underline{F}_v , fluxen.

5.4.2 Discretisatie

5.4.2a Integratie in de tijd

De tijdsintegratie van (5.109) wordt gedaan met de één-staps impliciete 'backward' Euler-methode, die eerste-orde-nauwkeurig in tijd is. De toestandsvector op het nieuwe tijdsniveau $n + 1$ wordt berekend uitgaande van de toestandsvector op het oude tijdsniveau n door

$$\frac{1}{\Delta t} \delta^n V W + \int_S \underline{F}^{n+1} \cdot \underline{n}^{n+1} dS^{n+1} = 0, \quad (5.110)$$

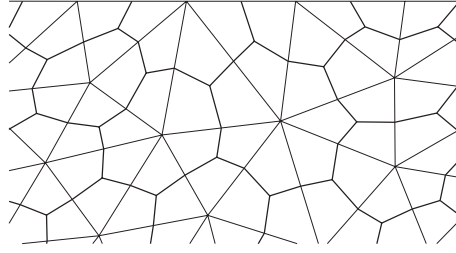
waarbij Δt de tijdstap is en

$$\delta^n V W = V^{n+1} W^{n+1} - V^n W^n.$$

5.4.2b Ruimtelijke discretisatie

De tweede term van vergelijking (5.110) wordt gediskretiseerd met de hoekpunt-gecentreerde methode op niet-gestructureerde driehoekige roosters. Controlevolumes worden geconstrueerd door de middens van de zijden te verbinden met de zwaartepunten

van de aanliggende driehoeken (zie figuur 5.24). In elke knoop van het rooster wordt een toestandsvector bijgehouden.



Figuur 5.24: Controlevolumes op een niet-gestructureerd driehoekig rooster.

De fluxvector \underline{F} wordt geschreven als

$$\underline{F} = \underline{F}_c + \underline{F}_a + \underline{F}_v. \quad (5.111)$$

De componenten (f_c, g_c) van \underline{F}_c , (f_a, g_a) van \underline{F}_a en (f_v, g_v) van \underline{F}_v zijn

$$\begin{aligned} f_c &= \begin{pmatrix} u(u - u_b) \\ v(u - u_b) \\ 0 \end{pmatrix}, & g_c &= \begin{pmatrix} u(v - v_b) \\ v(v - v_b) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_a &= \begin{pmatrix} p' \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, & g_a &= \begin{pmatrix} 0 \\ p' \\ v \end{pmatrix}, \\ f_v &= \begin{pmatrix} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \nu \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}, & g_v &= \begin{pmatrix} \nu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \nu \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

waarbij $\nu = \mu/\rho$ de kinematische viscositeit is.

De discretisatie gebeurt in overeenstemming met de methode die hierboven beschreven wordt. De convectieve termen van (5.112) worden gediscetiseerd door gebruik te maken van 'velocity upwinding'. Een centrale discretisatie wordt gekozen voor de akoestische termen. Een Laplaciaanse drukstabilisatie wordt toegevoegd aan de continuïteitsvergelijking. Voor de viskeuze termen van (5.112) wordt een centrale discretisatie gebruikt die exact is voor een lineair variërende toestand (zie appendix A).

Een tweede-orde discretisatie van de convectieve termen wordt geconstrueerd. De ruimtelijke afgeleiden worden berekend in elke driehoek met de aanname dat de toestand per driehoek lineair varieert. Gemiddelde ruimtelijke afgeleiden worden dan per knoop berekend uitgaande van de berekende afgeleiden van de omringende driehoeken. Er wordt geen limiter gebruikt. De linkertoestand aan de rand van het controlevolume wordt dan berekend als volgt : $Q_l = Q_i + \underline{D}_i \cdot \Delta \underline{x}$, met

$$\underline{D}_i = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \underline{x}} \right)_{gem}, \quad (5.113)$$

waarbij $\Delta \underline{x}$ de vector voorstelt tussen knoop i en het midden van de zijde die knopen i en k verbindt. gem duidt op het gemiddelde van alle gradiënten in de omringende driehoeken van knoop i . De rechtertoestand wordt uitgaande van knoop k op een gelijkaardige manier berekend.

De fluxbalans, de tweede term van vergelijking (5.109), kan voor knoop i nu geschreven worden als

$$\int_S \underline{F} \cdot \underline{n} dS = P_{i,0} Q_i + \sum_k P_{i,k} Q_k + R_i. \quad (5.114)$$

De som wordt genomen over alle buurknopen k van knoop i . De 3x3 coëfficiënt matrices P bestaan uit bijdragen van de akoestische discretisatie, de drukstabilisatie en de viskeuze discretisatie. De discretisatie van deze lineaire delen van de vergelijkingen blijft lineair. De vector R_i bevat zowel de eerste- als tweede-orde convectieve termen.

5.4.2c Ruimtelijke-conservatiewet

Wanneer een tijdsintegratieschema overeenkomstig (5.110) wordt gebruikt, worden de fluxen berekend op tijdsniveau $n + 1$. De gediscretiseerde ruimtelijke-conservatiewet (5.105) in knoop i kan op dit tijdsniveau geschreven worden als

$$V_i^{n+1} - V_i^n - \Delta t \sum_k \underline{v}_{b_{ik}} \cdot \underline{l}_{ik}^{n+1} = 0, \quad (5.115)$$

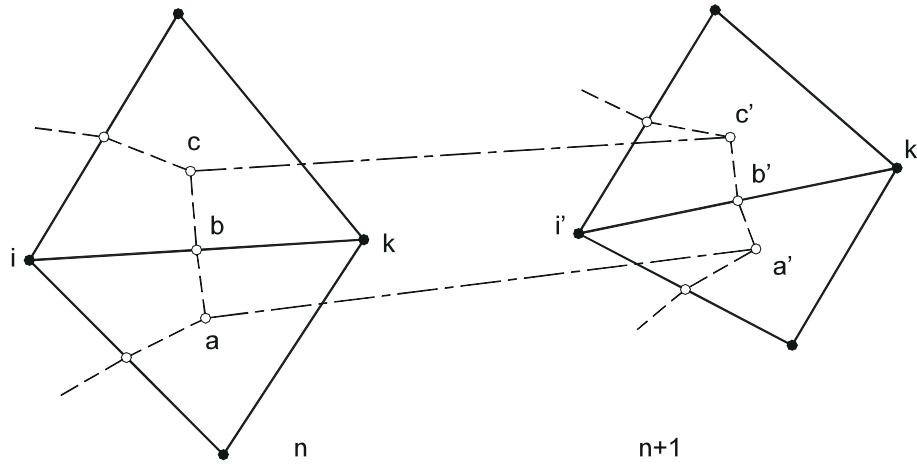
waarbij de som genomen wordt over de omringende knopen k . De subscript ik wijst op de zijde van het controlevolume dat geassocieerd is met zijde ik (ac en $a'c'$ in figuur 5.25). Aangezien controlevolumes gevormd worden door de verbinding van middens van zijden en zwaartepunten van driehoeken (zie figuur 5.25), is

$$\underline{l}_{ik}^{n+1} = \underline{l}_{a'b'} + \underline{l}_{b'c'} = \underline{l}_{a'c'}, \quad (5.116)$$

waarbij \underline{l} de vector is die normaal staat op de rand van het controlevolume en met als lengte de lengte van de zijde van het controlevolume. Uit een geometrische basis-eigenschap volgt dat

$$\Delta V_i = \sum_k \Delta V_{ik} \quad (5.117)$$

met V_{ik} het volume dat bezocht wordt door het deel van het controlevolume tussen knoop i en k wanneer het zich verplaatst tussen tijdstip n en $n + 1$. Hier wordt aangenomen dat de beweging van de knopen a , b en c rechtlijnig gebeurt. Dit volume V_{ik} is dan gelijk aan de oppervlakte van de veelhoek $abcc'b'a'a$ op de figuur 5.25.



Figuur 5.25: Beweging van de rand van het controlevolume gedurende Δt .

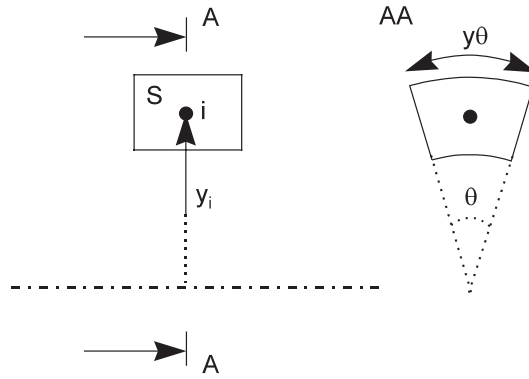
Voor de berekening van de convectieve fluxen moet alleen de normale component w_b van \underline{v}_b gekend zijn. Aangezien $\underline{v}_{b_{ik}} \cdot \underline{L}_{a'c'} = w_{b_{ik}} |\underline{L}_{a'c'}|$, kan de normale component w_b berekend worden uit

$$w_{b_{ik}} |\underline{L}_{df}| \Delta t = Opp_{abcc'b'a'a}, \quad (5.118)$$

van zodra het rooster op het nieuwe tijdstip $n + 1$ gekend is.

5.4.2d Discretisatie voor axisymmetrische geometrie

In het geval van axisymmetrische stroming wordt het controlevolume beschouwd als in figuur 5.26. Het (x-y) vlak kan nu gezien worden als het (x-r) vlak. Bij het berekenen van de fluxbalans (5.114) wordt voor de berekening van de flux doorheen een zijde nu rekening gehouden met de afstand van die zijde tot de symmetrie-as. In feite moeten alle fluxen die in het tweedimensionaal geval dienen berekend te worden, vermenigvuldigd worden met $y\theta$, waarbij y de afstand is van de zijde van het controlevolume tot de symmetrie-as en θ de hoek tussen voor- en achtervlak van het beschouwde controlevolume (zie figuur 5.26).



Figuur 5.26: Controlevolume voor axisymmetrische stromingsberekening.

Bijkomend zijn er nog fluxbijdragen voor de voor- en achtervlakken. Er is evenwel geen massaflux doorheen deze vlakken zodat er voor de continuïteitsvergelijking geen extra bijdrage is. Enkel in de impulsvergelijking in de y-richting komt er een drukbijdrage en een viskeuze bijdrage van deze vlakken.

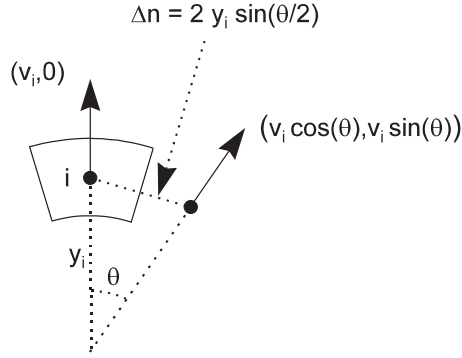
Deze bijdrage is voor de druk gelijk aan

$$\int_S p dS_{voor+achter} = 2pA\underline{n} \cdot \underline{1}_y = -2pA \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (5.119)$$

waarbij A de oppervlakte voorstelt van het voorvlak of het achtervlak. Beide hebben uiteraard dezelfde oppervlakte. Voor kleine waarden van θ wordt dit $-pA\theta$. Deze term wordt impliciet behandeld.

De viskeuze bijdrage wordt gegeven door

$$-\nu \int_S \frac{\partial v}{\partial n} dS_{voor+achter}. \quad (5.120)$$

Figuur 5.27: Normale afgeleide van v -component.

Uit figuur 5.27 volgt dat

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v (\cos \theta - 1)}{2y \sin (\theta/2)}, \quad (5.121)$$

zodat de viskeuze bijdrage gelijk wordt aan

$$-2\nu \frac{v (\cos \theta - 1)}{2y \sin (\theta/2)} A. \quad (5.122)$$

Voor kleine waarden van θ wordt dit

$$-2\nu \frac{v (-\theta^2/2)}{2y\theta/2} A = \frac{\nu v A \theta}{y}. \quad (5.123)$$

Deze term is lineair in v en de coëfficiënt van v kan groot worden nabij de symmetrie-as. Deze term is eigenlijk een negatieve bronterm in de y -impulsvergelijking en dient impliciet behandeld te worden. Opdat deze term eindig zou blijven op de symmetrie-as dient v daar gelijk aan nul te zijn. Op de symmetrie-as wordt de y -impulsvergelijking vervangen door de randvoorwaarde $v = 0$.

Eigenlijk kan nu θ weggedeeld worden uit alle fluxbepalingen zodat de omvorming van de tweedimensionale discretisatie naar de axisymmetrische discretisatie samengevat gegeven wordt door

- Elke flux die berekend wordt op de zijde van een controlevolume overeenkomstig de tweedimensionale discretisatie dient vermenigvuldigd te worden met de afstand van die zijde tot de symmetrie-as.

- In de y-impulsvergelijking dient volgende term toegevoegd te worden, afkomstig van de druk : $-pA$.
- In de y-impulsvergelijking dient volgende term toegevoegd te worden, afkomstig van de viscositeit : $\frac{\nu v A}{y}$.

5.4.3 Iteratiemethode

Door substitutie van de discretisatie (5.114) in de tijdsintegratie (5.110) is het stelsel dat elke tijdstap dient opgelost te worden :

$$\frac{1}{\Delta t} V_i^{n+1} W_i^{n+1} + P_{i,0}^{n+1} Q_i^{n+1} + \sum_k P_{i,k}^{n+1} Q_k^{n+1} + R_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} V_i^n W_i^n. \quad (5.124)$$

Dit stelsel wordt opgelost met de multitrapsmethode die hierboven reeds beschreven werd (§5.2.4a) :

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q^s \\ Q_1 &= Q_0 + \alpha_1 \, cfl \, \Delta Q_0 \\ Q_2 &= Q_0 + \alpha_2 \, cfl \, \Delta Q_1 \\ Q_3 &= Q_0 + \alpha_3 \, cfl \, \Delta Q_2 \\ Q_4 &= Q_0 + \alpha_4 \, cfl \, \Delta Q_3 \\ Q^{s+1} &= Q_4 \end{aligned} \quad (5.125)$$

met $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ gelijk aan $\{1/4, 1/3, 1/2, 1\}$ en cfl gelijk aan 1.

Hier verwijst de superscript s naar het iteratieniveau in pseudo-tijd τ . ΔQ_m is gedefinieerd door

$$\Delta Q_m = Q^{m+1} - Q^m, \quad (5.126)$$

en wordt voor de puntmethode berekend met

$$\begin{aligned} &\Gamma \frac{1}{\Delta \tau} V_i^m \Delta Q_i^m + \frac{1}{\Delta t} V_i^m W_i^{m+1} + P_{i,0}^m Q_i^{m+1} + \sum_k P_{i,k}^m Q_k^m + R_i^m \\ &= \frac{1}{\Delta t} V_i^n W_i^n, \end{aligned} \quad (5.127)$$

waarbij m het iteratieniveau in de multitrapp aanduidt. Met Γ wordt de preconditioneringsmatrix (5.19) aangeduid.

Voor de lijnmethode worden de componenten van

$$\sum_k P_{i,k}^m Q_k^m \quad (5.128)$$

die tot de lijn behoren impliciet behandeld. Dit betekent dat deze termen op het niveau $m + 1$ komen te staan.

5.4.4 Randvoorwaarden

Aan materiële randen wordt de snelheidsvector opgelegd. Deze snelheidsvector is gekend aangezien verondersteld wordt dat de beweging van de rand gekend is. De impulsvergelijking geprojecteerd in normale richting, vereenvoudigd door de verwaarlozing van de viskeuze termen, wordt gebruikt om de druk te berekenen :

$$\underline{n} \cdot \left(\frac{D\underline{u}}{Dt} + \nabla p \right) = \underline{n} \cdot \frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (5.129)$$

waarbij \underline{n} de uitwendige normale op de rand aanduidt.

Aan de inlaatrand wordt de snelheid opgelegd in functie van de tijd. De druk wordt geëxtrapoleerd uit het stromingsveld door gebruik te maken van vergelijking (5.129). In dit werk wordt aan de inlaat steeds $v = 0$ verondersteld. Voor een verticale inlaat herleidt $\underline{n} \cdot \frac{D\underline{u}}{Dt}$ zich dan tot

$$-\underline{1}_x \cdot \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5.130)$$

aangezien $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ en uit de continuïteitsvergelijking volgt dan dat ook $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Voor de vulling van het hart is er geen uitlaatrand. Indien echter in een slagader gerekend wordt is er wel een uitlaatrand. Dan dient de druk opgelegd te worden. Deze drukrandvoorwaarde kan functie zijn van het debiet. De snelheid wordt geëxtrapoleerd uit het stromingsveld zodat opnieuw aan vergelijking (5.129) voldaan wordt.

5.4.5 Besluit

In dit hoofdstuk wordt een nieuwe methode voorgesteld voor de discretisatie van de incompressibele Navier-Stokes-vergelijkingen. Een lokale preconditioneringsmethode wordt gecombineerd met een lijnmethode om de stijfheid die afkomstig is van hoge rooster-aspectverhoudingen teniet te doen. Deze lijnmethode wordt gebruikt in een multitrapsalgoritme en versneld met de multigridmethode. De verschillende testgevallen met alignering van de stroming samen met de hoge rooster-aspectverhouding van 1000, tonen dat de methode zeer robuust en performant is.

Een belangrijke gedachte wordt geopperd wat betreft de invloed van de randvoorwaarden. De convergentie is enkel gegarandeerd wanneer er een sterke demping is van alle golven in ten minste één richting en enkel indien deze richting eindigt op een Dirichlet-randvoorwaarde. Deze Dirichlet-randvoorwaarde moet in een bredere zin geïnterpreteerd worden. Bijvoorbeeld, voor een stromingsveld waar een sterke koppeling (en dus demping) bestaat in de y-richting, dat eindigt in een stromingsveld waar er ook een koppeling is in de x-richting, werkt dit laatste veld als een Dirichlet-randvoorwaarde voor het veld met de sterke koppeling in de y-richting. Een verificatie van deze gedachte wordt getoond in één van de testgevallen.

Er wordt verder getoond dat de uitbreiding naar compressibele stromingen met laag Mach-getal op roosters met hoge aspectverhoudingen voor de hand ligt. Dit werd enkel gedaan om het belang van de nieuwe discretisatie- en oplossingsmethode voor andere domeinen in het stromingsonderzoek aan te tonen. Momenteel wordt er immers veel onderzoek verricht naar performante methodes op roosters met hoge aspectverhoudingen.

De 'backward facing step' werd gebruikt als realistisch stromingsprobleem. Het convergentieverloop toonde een zeer goede convergentie voor dit testgeval, zowel voor de incompressibele als compressibele toepassing.

Nadien werden de uitbreidingen toegelicht voor stromingsberekeningen in niet-stationaire bewegende geometrieën zoals in de linkerhartkamer. Er wordt verondersteld dat de verplaatsing van de hartspierwand gekend is. Deze moet ofwel op voorhand opgemeten worden ofwel berekend worden met een model dat de hartspierwand beschrijft. Enkel de tweede aanpak wordt verder in dit werk gebruikt. De modellering van de verplaatsing van de hartspierwand wordt in het volgende hoofdstuk behandeld.

Hoofdstuk 6

Verplaatsing van de hartspierwand

6.1 Inleiding

Tijdens de vullingsfase van de linkerventrikel is er een verplaatsing van de hartspierwand. Deze verplaatsing is het resultaat van enerzijds een verandering van krachten in de hartspierwand ten gevolge van de relaxatie van de hartspier en anderzijds een verandering van het drukniveau en de drukverdeling in de hartkamer. Beide invloeden zijn niet onafhankelijk.

Dit wordt aangetoond in volgend voorbeeld. De relaxatie van de hartspierwand heeft een drukdaling tot gevolg in de linkerventrikel. Wanneer deze druk daalt beneden de atriale druk opent de mitraalklep en start de vulling. De verandering van de snelheden (de versnelling) in de hartkamer gaat gepaard met intraventriculaire drukverschillen (de krachten). Het verband tussen de snelheden en de drukken in de hartkamer wordt dus beschreven door de tweede wet van Newton, die voor fluïda omgevormd wordt tot de Navier-Stokes-vergelijkingen.

De verplaatsing van de hartspierwand heeft dus een invloed op de drukverdeling in de linkerventrikel en omgekeerd heeft de drukverdeling in de linkerventrikel een invloed op de verplaatsing van de hartspierwand.

In dit hoofdstuk wordt een oplossingsmethode voorgesteld die de positie van de hartspierwand bepaalt, mits de veronderstelling dat de drukverdeling in de linkerventrikel gekend is ter hoogte van de hartspierwand. Deze drukverdeling kan een willekeurig ruimtelijk verloop hebben. Bovendien kan reeds rekening gehouden worden met het feit dat wanneer de hartspierwand een andere positie inneemt, dat ook de drukverdeling op de wand wijzigt.

De oplossingsmethode maakt gebruik van een discretisatie van de hartspierwand, m.a.w. de hartspierwand wordt onderverdeeld in een eindig aantal segmenten. De keuze van de segmenten is in principe vrij, maar om praktische redenen is het voordelig om de segmenten te koppelen aan de randknopen van het rooster dat gebruikt wordt voor de stromingsberekening. De posities van de randknopen bepalen dan de positie van de hartspierwand.

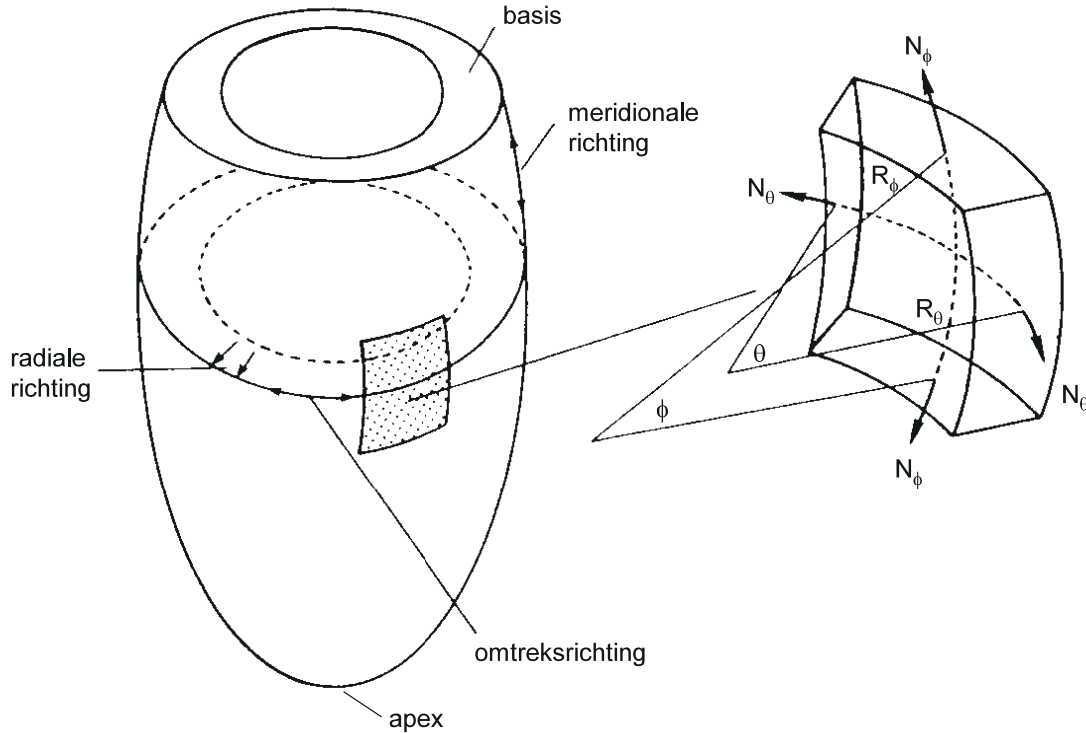
6.2 Voorstelling van de hartspierwand

De keuze van de voorstelling van de hartspierwand hangt samen met de toepassing waarvoor het model van de hartspierwand gebruikt wordt. In deze studie wordt de hartspierwand enkel beschouwd als een randvoorwaarde voor het stromingsprobleem. De hartspierwand geeft immers het ontbrekende verband tussen positie van de wand en de drukverdeling.

Meestal echter is men geïnteresseerd in de spanningsverdeling in de hartspierwand en gaat men op zoek naar de plaatsen met de grootste spanningen omdat men verwacht dat die zones de meest kritische zijn voor beschadiging van de hartspierwand. Men maakt dan een gesofistikeerd stuktuurmodel voor de hartspierwand, rekening houdend met de oriëntatie van de spiervezels en met een variërende elasticiteitsmodulus over de dikte van de hartspier. Wanneer men dan de positie van de hartspierwand en de linkerventriculaire druk kent, berekent men de spanningsverdeling. De gebruikte modellen voor de linkerventrikel variëren van een analytisch sferisch model tot een driedimensionaal model met eindige elementen.

Voor onze toepassing is het niet nodig de spanningsverdeling in de hartspierwand te kennen en aangezien we geopteerd hebben voor een axisymmetische stromingsberekening, kan de hartspier ook niet nauwkeuriger voorgesteld worden dan een omwentelingslichaam. De gebruikte voorstelling van de hartspierwand wordt getoond in figuur 6.1.

Voor een dunwandige hartspier zouden de omtreks- en meridionale spanningen bijna niet variëren in functie van de dikte van de spier. De spier is echter dikwandig en er kan wel een sterke variatie zijn van deze spanningen over de dikte [45, 57, 81, 82, 83, 103, 153]. De resultante van $\sigma_{\theta\theta}$ over de dikte is N_θ , de kracht per eenheid van lengte van de meridiaan. Analooq is N_ϕ de kracht per eenheid van lengte van de parallelcirkel. De krachten N_θ en N_ϕ die eigenlijk geen echte krachten zijn maar krachten per eenheid van lengte, zullen in hetgeen volgt aangeduid worden met de term resulterende krachten. Samen met de overeenkomstige kromtestralen R_θ en R_ϕ worden ze getoond in figuur 6.1.



Figuur 6.1: Definitie van de omtreksspanning en meridionale spanning en de bijhorende kromtestralen.

De dikte van de spierwand varieert tijdens de vulling van de linkerventrikel. Op het einde van de systole is de spier immers veel dikwandiger dan op het einde van de diastole. Om de variatie van de spierwanddikte te elimineren voor de verdere berekeningen, zal een verband opgesteld worden tussen de resulterende krachten N_θ en N_ϕ , en de rekken gemeten op het endocard. Deze rek gemeten op het endocard in omtreksrichting wordt voorgesteld door $\varepsilon_{\theta\theta}$ en deze gemeten in meridionale richting is $\varepsilon_{\phi\phi}$.

Aangezien echter ook de buigende momenten worden verwaarloosd in het gebruikte model, leunt het model zeer dicht aan bij een dunwandige membraanvoorstelling van de hartspierwand zonder buigstijfheid. Dit zal verder aangetoond worden.

6.2.1 Keuze van de geometrie

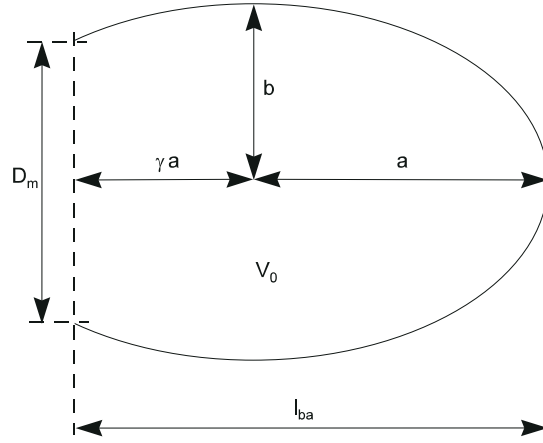
De keuze van de geometrie dient enkel gemaakt te worden voor een bepaalde referentietoestand. Deze referentietoestand wordt genomen bij het volume V_0 waarbij de transmurale druk nul is. De rekken zijn dan ook nul. Met deze geometrie worden de referentielengten berekend die nodig zijn voor de berekening van de rekken.

De vorm van de ventrikel in de referentietoestand wordt gekozen als een afgeknotte omwentelingsellipsoïde. Tijdens de vulling zal de ventrikel geen zuivere omwentelingsellipsoïde blijven, want de positie van de ventrikelwand wordt dan bepaald door de evenwichtsvergelijkingen beschreven in §6.3.1.

Een afgeknotte omwentelingsellipsoïde (figuur 6.2) met de as in de x -richting wordt beschreven door

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1, \quad (6.1)$$

waarbij x begrepen is tussen $-\gamma a$ en a . a en b stellen respectievelijk de grote en de kleine as voor van de gehele ellipsoïde. $-\gamma a$ en a stellen de posities voor van respectievelijk de mitraalklep en de apex.



Figuur 6.2: Afgeknotte omwentelingsellipsoïde : afmetingen.

Wanneer het volume V_0 , de diameter van de mitraalklep D_m en de afstand van basis naar apex l_{ba} gekend zijn, kunnen a , b en γ berekend worden uit volgende formules :

$$a = \frac{l_{ba}}{1 + \gamma}, \quad (6.2)$$

$$b = \frac{D_m}{2\sqrt{1 - \gamma^2}}, \quad (6.3)$$

waarbij γ gegeven wordt door

$$\gamma = \frac{\beta - 2}{\beta - 1}, \quad (6.4)$$

met

$$\beta = \frac{12V_0}{\pi D_m^2 l_{ba}}. \quad (6.5)$$

Het volume van de afgeknotte ellipsoïde wordt immers berekend als

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_{-\gamma a}^a \pi r^2 dx \\ &= b^2 \int_{-\gamma a}^a \pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Door substitutie van a en b uit (6.2) en (6.3) volgt na uitwerking :

$$V_0 = \frac{\pi D_m^2 l_{ba}}{12} \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}. \quad (6.7)$$

Door de keuze van β zoals in (6.5) kan hieruit γ (6.4) berekend worden. (6.2) zegt niets anders dan $l_{ba} = \gamma a + a$ en (6.3) wordt bekomen door $r = D_m/2$ en $x = -\gamma a$ te substitueren in (6.1). In hetgeen volgt, wordt de ventrikel verschoven over een afstand γa zodat de positie van de mitraalklep in de oorsprong ($x=0$) valt en de positie van de apex door $x=l_{ba}$ gegeven wordt.

De parameters worden gekozen zodat ze fysiologisch relevant zijn voor een hon-denhart :

- Volume $V_0 = 12$ ml [82].
- Diameter aan basis $D_m = 1.5$ cm.
- Afstand basis-apex $l_{ba} = 4$ cm.

6.2.2 Constitutieve wetten voor de hartspierwand

6.2.2a Constitutieve wet voor de passieve hartspierwand

Om de hartspierwand numeriek te karakteriseren in passieve toestand wordt gebruik gemaakt van een verband tussen de resulterende krachten N_θ en N_ϕ en de rekken $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$. Dit verband werd sterk geïnspireerd door het werk van Janz en Grimm [58, 59]. Zij beschrijven een niet-lineair spannings-rek verband als volgt :

$$\sigma_i = \frac{E}{\alpha(1+\nu)} \left[\exp(\alpha\varepsilon_i) - \exp\left(-\frac{\alpha\nu}{1-2\nu} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j\right) \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.8)$$

Hierin zijn E de elasticiteitsmodulus van Young voor kleine rekken en ν de coëfficiënt van Poisson. α is een parameter die gebruikt wordt om het niet-lineaire karakter van de hartspierwand voor te stellen. De grootheden σ_i zijn de drie hoofdspanningen en ε_i de rekken in de overeenkomstige richtingen.

Gebaseerd op (6.8), maar rekening houdend met de voorstelling van de hartspierwand als een dunne omwentelingsschaal, waarbij de spanningen in radiale richting kunnen verwaarloosd worden ten opzichte van de spanningen in meridionale en omtreksrichting, kan het verband tussen de resulterende krachten N_θ en N_ϕ en de rekken $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$ geschreven worden als

$$N_\theta = \frac{Eh}{\alpha(1+\nu)} \left[\exp(\alpha\varepsilon_{\theta\theta}) - \exp\left(-\frac{\alpha\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi})\right) \right], \quad (6.9)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{\alpha(1+\nu)} \left[\exp(\alpha\varepsilon_{\phi\phi}) - \exp\left(-\frac{\alpha\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi})\right) \right]. \quad (6.10)$$

Hierin stelt h de wanddikte van de ventrikel voor in de referentietoestand. Door deze keuze dient verder geen rekening meer gehouden te worden met de verandering van de wanddikte wanneer het ventrikelvolume verandert. Dit niet-lineair effect dat enkel optreedt voor grote vervormingen, wat hier het geval is, wordt samen met alle andere niet-lineaire effecten in één enkele parameter α behandeld. Er wordt aangenomen dat de hartspierwand onsamendrukbaar is zodat de coëfficiënt van Poisson ν gelijk is aan $1/2$.

Voor kleine vervormingen ten opzichte van de referentietoestand of voor kleine α kunnen (6.9) en (6.10) geschreven worden als

$$N_\theta = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) \right] = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\phi\phi}), \quad (6.11)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\phi\phi} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) \right] = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\phi\phi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}), \quad (6.12)$$

of opgelost naar de rekken geeft dit

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_\phi), \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{Eh} (N_\phi - \nu N_\theta). \quad (6.14)$$

Deze vergelijkingen zijn de constitutieve wetten die van toepassing zijn voor kleine vervormingen bij dunne omwentelingsschalen, en dit voor een isotroop en lineair elastisch materiaal.

De constitutieve vergelijkingen (6.9) en (6.10) kunnen dus gezien worden als een eenvoudige uitbreiding van de lineaire theorie naar grote vervormingen en niet-lineair elastisch materiaal. Met de anisotropie van de hartspierwand wordt evenwel geen rekening gehouden.

Zoals reeds vroeger vermeld, is het niet de bedoeling om een gedetailleerd model te maken van de hartspierwand, dat zou toelaten om de optredende spanningen nauwkeurig te bestuderen. Dergelijk model zou minstens tweedimensionaal axisymmetrisch de hartspierwand moeten beschrijven.

Aangezien voor onze toepassing enkel een verband nodig is tussen de positie van de hartspierwand en de transmurale druk, worden de spanningen geïntegreerd in de dikte van de hartspierwand. Dit legt uit waarom er voor onze toepassing kan gerekend worden met een ééndimensionaal axisymmetrisch model voor de hartspierwand.

6.2.2b Constitutieve wet voor de hartspierwand tijdens de relaxatie

Tijdens de relaxatie verandert de compliantie van de ventrikel bij éézelfde volume. Dit kan worden gemodelleerd door de modulus van Young tijdsafhankelijk te maken :

$$E = E_{start} + (E_{stop} - E_{start}) (1 - e^{-t/\tau}) , \quad (6.15)$$

waarbij t de tijd voorstelt en τ de tijdsconstante van de relaxatie. E_{start} is de modulus bij het begin van de relaxatie en E_{stop} is de modulus in de passieve toestand van de hartspierwand.

6.3 Discretisatie van de hartspierwand

Om de verplaatsing van de hartspierwand te kunnen bepalen, moeten we rekening houden met de constitutieve wetten voor de hartspier samen met de belasting die op de hartspier inwerkt. In dit model wordt aangenomen dat de uitwendige krachten op de hartspierwand enkel bestaan uit drukken. De schuifspanningen die het bloed uitoefenen op de hartspierwand kunnen verwaarloosd worden, gezien de kleine snelheden die optreden tijdens de vulling van de ventrikel en gezien de kleine viscositeit van het bloed.

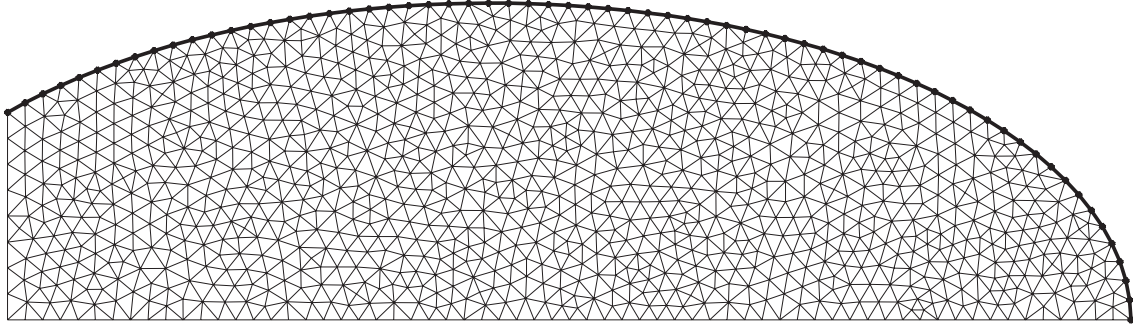
Deze schuifspanning τ wordt gegeven door

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} , \quad (6.16)$$

met μ de dynamische viscositeit van bloed, u de snelheid van het bloed langs de wand en n de normale richting op de wand. Neem aan dat de maximale snelheid van het bloed tijdens de vulling 1 m/s zou bedragen en dat deze snelheid zou optreden in een jet die langs de wand stroomt met een grenslaagdikte van 1 mm. Met een waarde voor de dynamische viscositeit van bloed van $3.5 \cdot 10^{-3}$ Pa s, bedraagt de waarde voor de schuifspanning 3.5 Pa of 0.0263 mmHg. De krachten die verbonden zijn met de drukken zijn een factor 100 tot 1000 keer groter. Het is dus volkomen verantwoord om de invloed van de schuifkrachten die het bloed op het endocard uitoefenen, te verwaarlozen.

Aangezien de hartspierwand samenvalt met de rand van het rooster voor de stromingsberekening is het aangewezen om de discretisatie van de hartspierwand in overeenstemming te nemen met de randdiscretisatie van het rooster. Elke randknoop

in het rooster treedt dus op als knoop in de éédimensionale discretisatie van de hartspierwand. Dit wordt getoond in figuur 6.3 waar een mogelijke discretisatie van de linkerventrikel wordt voorgesteld in de referentietoestand als een afgeknotte ellipsoïde met de daarbij horende randdiscretisatie zoals hierboven beschreven.



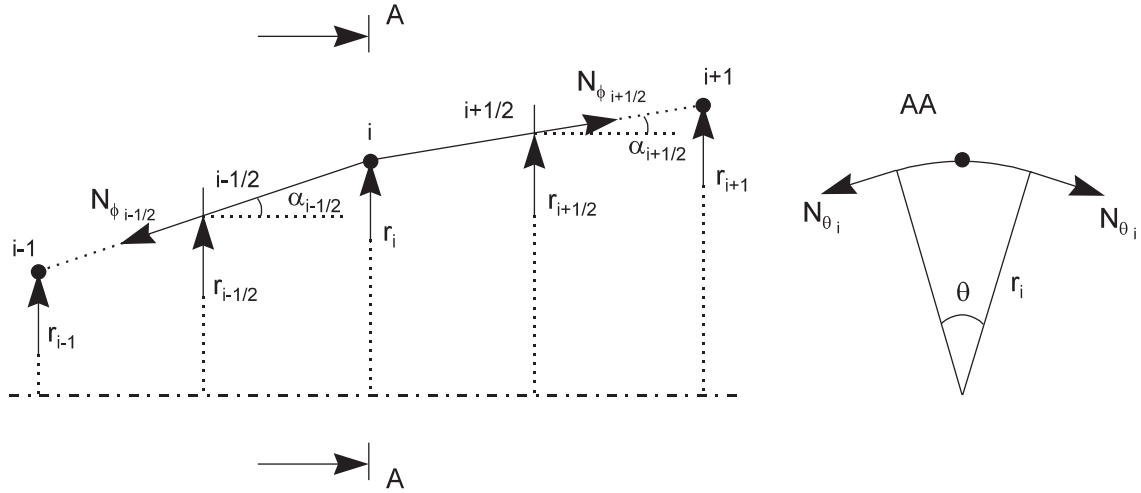
Figuur 6.3: Discretisatie van de ventrikel met bijhorende randdiscretisatie.

Aangezien de stromingsberekening zal gekoppeld worden met de verplaatsing van de hartspierwand, moet de berekende positie van de hartspierwand overgedragen worden naar het stromingsprobleem en omgekeerd, moeten de drukken die bepaald worden tijdens de oplossing van het stromingsprobleem gebruikt worden voor de berekening van de verplaatsing van de hartspierwand. Door beide discretisaties op elkaar af te stemmen, is de overdracht van de nodige informatie tussen beide deelproblemen zeer eenvoudig.

6.3.1 Evenwichtsvergelijkingen voor de bepaling van de verplaatsing van de hartspierwand

Figuur 6.4 toont één elementair volume (controlevolume) van de hartspierwand, getekend rond knoop i . De coördinaten van deze knoop zijn (x_i, r_i) . Hierbij duidt x_i de afstand aan tussen knoop i en de mitraalklep in de richting van de symmetrie-as en r_i is de afstand tussen knoop i en de symmetrie-as. Het controlevolume wordt begrensd ter hoogte van positie $i - 1/2$ en $i + 1/2$ waarbij $i - 1/2$ het midden voorstelt tussen knoop $i - 1$ en knoop i en $i + 1/2$ op analoge wijze het midden voorstelt tussen knoop i en knoop $i + 1$.

In omtreksrichting wordt enkel een segment van de totale omtrek voorgesteld met een openingshoek θ . De ligging van de resulterende krachten N_θ en N_ϕ worden aangegeven op de figuur. Deze resulterende krachten zijn functie van de lokale rekken $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$ volgens (6.9) en (6.10).



Figuur 6.4: Controlevolume gebruikt bij de discretisatie van de hartspierwand.

6.3.1a Definitie van de rekken

Voor het beschouwde controlevolume wordt de rek in omtreksrichting $\varepsilon_{\theta\theta_i}$ gegeven door

$$\varepsilon_{\theta\theta_i} = \frac{2\pi r_i - 2\pi r_{0i}}{2\pi r_{0i}}. \quad (6.17)$$

De rek in meridionale richting wordt voor het segment tussen knoop i en knoop $i+1$ gegeven door

$$\varepsilon_{\phi\phi_{i+1/2}} = \frac{l_{i+1/2} - l_{0i+1/2}}{l_{0i+1/2}}, \quad (6.18)$$

met

$$l_{i+1/2} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (r_{i+1} - r_i)^2}, \quad (6.19)$$

de afstand tussen knoop i en knoop $i+1$. De index $_0$ duidt op de referentietoestand waarbij de rekken nul zijn.

De rek in meridionale richting $\varepsilon_{\phi\phi_{i-1/2}}$ voor het segment tussen knoop $i-1$ en knoop i wordt op analoge wijze berekend.

6.3.1b Opstellen van het krachtenevenwicht

Evenwicht in axiale richting Het krachtenevenwicht in axiale richting wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
 & F_{a_i}(x_{i-1}, r_{i-1}, x_i, r_i, x_{i+1}, r_{i+1}) \\
 &= N_{\phi_{i+1/2}} \cos \phi_{i+1/2} \theta r_{i+1/2} - N_{\phi_{i-1/2}} \cos \phi_{i-1/2} \theta r_{i-1/2} \\
 &\quad - p_i \frac{\theta}{2} (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) - M_i \frac{\theta}{2\pi} \frac{Du}{Dt} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Hierbij is ϕ de hoek tussen de richting van de symmetrie-as en de meridiaan zoals aangeduid op figuur 6.4. De laatste term is de axiale component van de traagheidskracht die inwerkt op het beschouwde element waarbij M_i de massa voorstelt van het deel van de linkerventrikel genomen over de gehele omtrek tussen positie $i - 1/2$ en $i + 1/2$. De straal $r_{i+1/2}$ is het rekenkundige gemiddelde van de stralen r_i en r_{i+1} en $r_{i-1/2}$ is op een analoge wijze gedefinieerd. De snelheid u is de Cartesische component in x-richting van de snelheidsvector in de randknoop.

Voor kleine waarden van de openingshoek θ en na deling door θ wordt (6.20) geschreven als

$$\begin{aligned}
 & F_{a_i}(x_{i-1}, r_{i-1}, x_i, r_i, x_{i+1}, r_{i+1}) \\
 &= N_{\phi_{i+1/2}} \cos \phi_{i+1/2} r_{i+1/2} - N_{\phi_{i-1/2}} \cos \phi_{i-1/2} r_{i-1/2} \\
 &\quad - p_i \frac{1}{2} (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) - \frac{M_i}{2\pi} \frac{Du}{Dt} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Evenwicht in radiale richting Het krachtenevenwicht in radiale richting wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
 & F_{r_i}(x_{i-1}, r_{i-1}, x_i, r_i, x_{i+1}, r_{i+1}) \\
 &= N_{\phi_{i+1/2}} \sin \phi_{i+1/2} \theta r_{i+1/2} - N_{\phi_{i-1/2}} \sin \phi_{i-1/2} \theta r_{i-1/2} \\
 &\quad - 2N_{\theta_i} l_i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + p_i \Delta x_i r_i \theta - M_i \frac{\theta}{2\pi} \frac{Dv}{Dt} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Hierbij is

$$l_i = \frac{1}{2} (l_{i-1/2} + l_{i+1/2}) \quad (6.23)$$

en

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad (6.24)$$

waarbij $x_{i-1/2}$ en $x_{i+1/2}$ op gelijkaardige wijze gedefinieerd worden als $r_{i-1/2}$ en $r_{i+1/2}$. De laatste term stelt hier de radiale component van de traagheidskracht voor.

Voor kleine waarden van de openingshoek θ en na deling door θ wordt (6.22)

$$\begin{aligned} & F_{r_i}(x_{i-1}, r_{i-1}, x_i, r_i, x_{i+1}, r_{i+1}) \\ &= N_{\phi_{i+1/2}} \sin \phi_{i+1/2} r_{i+1/2} - N_{\phi_{i-1/2}} \sin \phi_{i-1/2} r_{i-1/2} - N_{\theta_i} l_i \\ & \quad + p_i \Delta x_i r_i - \frac{M_i}{2\pi} \frac{Dv}{Dt} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.3.1c Randvoorwaarden

De mitraalklep wordt in dit model verondersteld een stijve ring te zijn, zodat er geen verplaatsing is van de corresponderende knoop.

Aan de apex is de ventrikel gesloten. Dit betekent dat de straal r_{apex} gelijk wordt aan nul. De positie van de apex wordt dus bepaald door één enkele parameter, nl. de axiale positie x_{apex} . Er dient dus slechts één evenwichtsvergelijking gebruikt te worden en dit is de evenwichtsvergelijking in axiale richting geschreven tussen de positie $i-1/2$ en knoop i , waarbij knoop i de apex aanduidt.

6.3.1d Wet van Laplace

Het verband tussen de transmurale druk en de resulterende krachten wordt voor een dunwandig membraan gegeven door de vergelijking van Laplace :

$$p = \frac{N_\theta}{R_\theta} + \frac{N_\phi}{R_\phi}, \quad (6.26)$$

met R_θ de kromtestraal in omtreksrichting en R_ϕ de kromtestraal in meridionale richting (overeenkomstig figuur 6.1). Deze vergelijking wordt bekomen door het krachterevenwicht uit de drukken in een richting normaal op het membraan. Deze richting heeft als richtingscoëfficiënten $(-\sin \phi_i, \cos \phi_i)$. De projectie van de evenwichtsvergelijkingen (6.21) en (6.26) in deze richting resulteert in :

$$\begin{aligned}
& -\sin \phi_i N_{\phi_{i+1/2}} \cos \phi_{i+1/2} r_{i+1/2} + \sin \phi_i N_{\phi_{i-1/2}} \cos \phi_{i-1/2} r_{i-1/2} \\
& + \sin \phi_i p_i \frac{1}{2} (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \\
& + \cos \phi_i N_{\phi_{i+1/2}} \sin \phi_{i+1/2} r_{i+1/2} - \cos \phi_i N_{\phi_{i-1/2}} \sin \phi_{i-1/2} r_{i-1/2} \\
& - \cos \phi_i N_{\theta_i} l_i + \cos \phi_i p_i \Delta x_i r_i \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

De coëfficiënt van $N_{\phi_{i+1/2}}$ wordt gegeven door

$$(-\sin \phi_i \cos \phi_{i+1/2} + \cos \phi_i \sin \phi_{i+1/2}) r_{i+1/2}. \tag{6.28}$$

Voor kleine verschillen tussen ϕ_i en $\phi_{i+1/2}$ wordt deze uitdrukking vereenvoudigd tot

$$(\phi_{i+1/2} - \phi_i) r_{i+1/2}. \tag{6.29}$$

Op analoge wijze vereenvoudigt de coëfficiënt van $N_{\phi_{i-1/2}}$ gegeven door

$$(\phi_i - \phi_{i-1/2}) r_{i-1/2}. \tag{6.30}$$

Nu is [26]

$$\frac{1}{R_\phi} = -\frac{\partial \phi}{\partial l}, \tag{6.31}$$

zodat

$$\phi_{i+1/2} - \phi_i \approx -\frac{l_{i+1/2}}{2R_{\phi_i}} \quad \text{en} \quad \phi_i - \phi_{i-1/2} \approx -\frac{l_{i-1/2}}{2R_{\phi_i}}. \tag{6.32}$$

Verder is

$$r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2 \approx 2r_i (r_{i+1/2} - r_{i-1/2}) \approx 2r_i l_i \sin \phi_i, \quad (6.33)$$

aangezien $\sin \phi = \frac{\partial r}{\partial l}$. Nu is ook $\cos \phi = \frac{\partial x}{\partial l}$ zodat (6.27) kan geschreven worden als

$$-N_{\phi_{i+1/2}} r_{i+1/2} \frac{l_{i+1/2}}{2R_{\phi_i}} - N_{\phi_{i-1/2}} r_{i-1/2} \frac{l_{i-1/2}}{2R_{\phi_i}} - N_{\theta_i} l_i \cos \phi_i + p_i r_i l_i = 0. \quad (6.34)$$

Voor l_i gaande naar nul en gebruik makend van de definitie van R_θ als $1/R_\theta = \cos \phi/r$ [26] en na deling door de straal r_i en door l_i wordt (6.34) verder vereenvoudigd tot

$$p_i = \frac{N_{\phi_i}}{R_{\phi_i}} + \frac{N_{\theta_i}}{R_{\theta_i}}. \quad (6.35)$$

De gebruikte evenwichtsvergelijkingen voor knoop i herleiden zich dus voor een infinitesimaal controlevolume en na projectie op de normale richting op het oppervlak tot de vergelijking van Laplace (6.26) geschreven in knoop i .

6.3.2 Oplossingsmethode voor de bepaling van de verplaatsing van de hartspierwand

De posities van de knopen moeten voldoen aan de evenwichtsvoorwaarden. Stellen we de positie van de knopen voor door

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \vdots \\ X_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

waarbij X_i de positie van knoop i voorstelt :

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ r_i \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Stellen we de evenwichtsvergelijkingen voor door

$$\underline{F}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

waarbij F_i de vergelijkingen voor knoop i voorstelt

$$F_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) = \begin{bmatrix} F_{a_i}(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) \\ F_{r_i}(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

dan is er evenwicht voor $\underline{X} = \underline{X}_{ev}$ als

$$\underline{F}(\underline{X}_{ev}) = 0. \quad (6.40)$$

Gebruik makend van de Newton-Raphson methode kan vertrekkende van een willekeurige toestand \underline{X}^0 in de omgeving van de evenwichtstoestand, de evenwichtstoestand \underline{X}_{ev} gevonden worden door het iteratief oplossen van

$$\underline{F}(\underline{X}^{n+1}) = \underline{F}(\underline{X}^n) + \nabla \underline{F}(\underline{X}^n) (\underline{X}^{n+1} - \underline{X}^n) = 0, \quad (6.41)$$

waarbij na convergentie $\underline{X}_{ev} = \underline{X}^{n+1} = \underline{X}^n$. De Jacobiaan $\nabla \underline{F}(\underline{X})$ wordt gegeven door

$$\nabla \underline{F}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{\partial F_i}{\partial X_{i-1}} & \frac{\partial F_i}{\partial X_i} & \frac{\partial F_i}{\partial X_{i+1}} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

met

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{a_i}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{a_i}}{\partial r_i} \\ \frac{\partial F_{r_i}}{\partial x_i} & \frac{\partial F_{r_i}}{\partial r_i} \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

De afgeleiden kunnen analytisch berekend worden, maar dit zou betekenen dat voor elke wijziging in de constitutieve wetten de berekening opnieuw dient te gebeuren. Bovendien is het numeriek berekenen van de afgeleide goedkoper. De extra kost voor het berekenen van een afgeleide komt overeen met één functie-evaluatie wat eenvoudiger is dan het evalueren van de meer ingewikkelde afgeleide functie. De berekening van de afgeleide $\frac{\partial F_{a_i}}{\partial x_i}$ gebeurt als volgt

$$\frac{\partial F_{a_i}}{\partial x_i} \approx \frac{F_{a_i}(\dots, x_i + \Delta x, \dots) - F_{a_i}(\dots, x_i, \dots)}{\Delta x}, \quad (6.44)$$

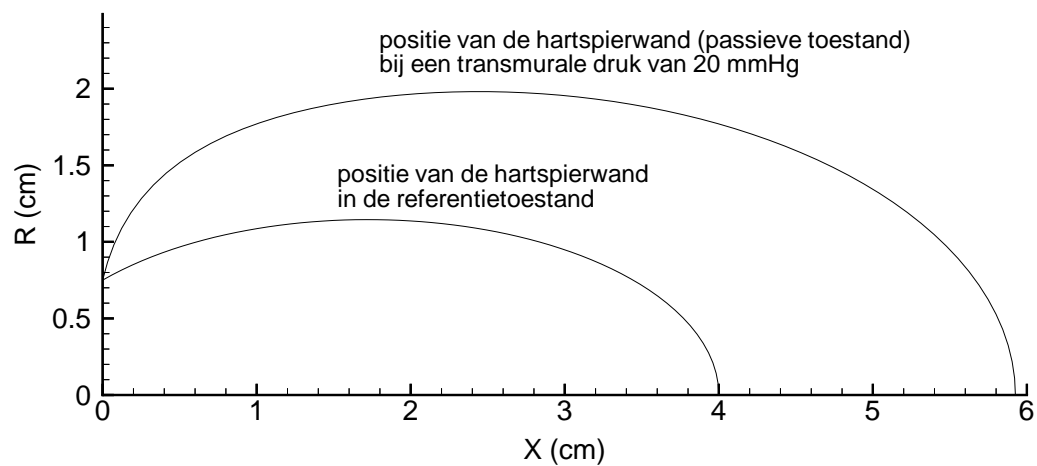
waarbij Δx gekozen wordt als een zeer kleine fractie van de maximale afstand tussen twee roosterknopen. Deze gebruikte fractie is 10^{-5} .

Een tweede mogelijkheid om de vergelijkingen op te lossen is het gebruik maken van de Jacobi methode. Hierbij wordt hetzelfde iteratieschema gebruikt maar in het opstellen van de Jacobiaan wordt enkel rekening gehouden met de diagonaal uit (6.42) die bestaat uit de 2x2 matrices $\frac{\partial F_i}{\partial X_i}$. Het convergentiegedrag van de twee methodes wordt vergeleken aan de hand van volgend voorbeeld.

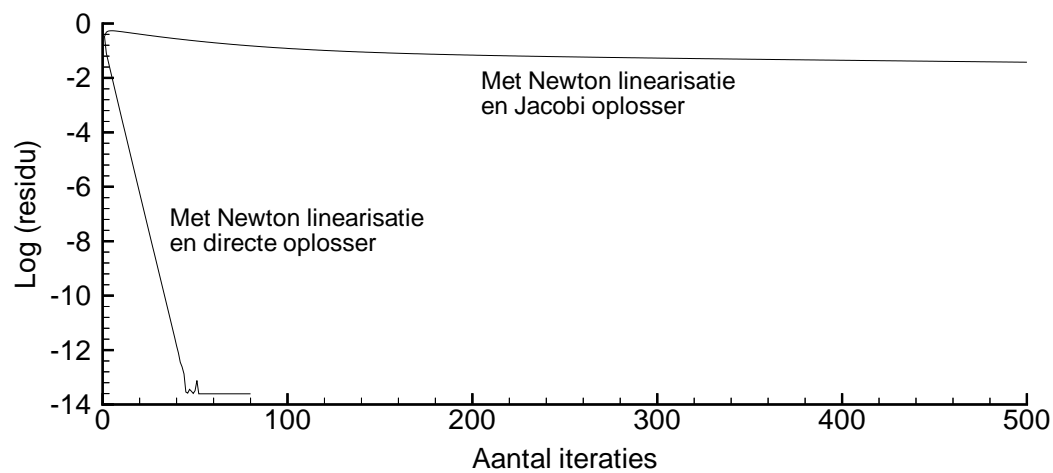
We gaan uit van de geometrie voor een hondenhart beschreven in 6.2.1. Er wordt een oplossing gezocht voor de positie van de hartspierwand die hoort bij een transmurale druk van 20 mmHg.

Figuur 6.5 toont de gezochte positie van de hartspierwand en de referentietoestand die als initiële toestand gekozen werd bij het begin van de iteraties. Er zijn 65 randknopen van het rooster die de positie van de hartspierwand bepalen. De berekening werd gedaan met de parameters voor de constitutieve wetten, beschreven in §6.4.

Figuur 6.6 toont de iteraties die nodig waren voor de Newton-Raphson methode en de Jacobi methode. De Newton-Raphson methode convergeert veel sneller en het verschil in snelheid zal nog toenemen indien er meer knopen op de rand genomen worden. Beide methodes hebben nochtans voordelen. Indien de verplaatsing van de hartspierwand geen invloed heeft op de druk is de Newton-Raphson methode zeker te verkiezen. Indien echter de verplaatsing van de hartspierwand een terugkoppeling naar de druk geeft (tijdens het gekoppeld oplossen met stromingsprobleem) kan het nuttiger zijn om de Jacobi methode te gebruiken. Dit zal nog verder besproken worden in het gedeelte over de bloed-hartspierwand interactie.



Figuur 6.5: Positie van de hartspierwand in de referentietoestand en horende bij een transmurale druk van 20 mmHg (passieve toestand).



Figuur 6.6: Convergentieresultaat voor de berekening van de positie van de hartspierwand. Vergelijking tussen de Newton-Raphson methode en de Jacobi methode.

6.3.3 Drukbeplating overeenkomstig met gegeven ventrikel-volume

In de referentietoestand is de transmurale druk nul. Voor een gegeven ventriculaire druk kan de positie van de hartspierwand berekend worden door gebruik te maken van de hierboven beschreven methode. Uit deze positie van de hartspierwand kan het ventriculair volume berekend worden door numerieke integratie.

Wanneer echter de druk moet berekend worden die overeenstemt met een bepaald ventriculair volume, wordt als volgt te werk gegaan. Eerst wordt een waarde voor de druk vooropgesteld. Met deze waarde wordt de positie van de hartspierwand berekend en het overeenkomstig volume. Indien het volume dat berekend is niet overeenstemt met het gewenste volume, wordt de druk aangepast en een nieuw volume bepaald. Dit gaat zo verder tot het berekende volume gelijk wordt aan het gewenste volume. De ingestelde druk is dan de gevraagde druk.

Stel het gewenste volume voor door V_w en de overeenkomstige druk met p_w . Indien p^n de druk is na de n -de iteratie en V^n het overeenkomstige volume dan wordt een nieuwe druk p^{n+1} bepaald uit

$$p^{n+1} = p^n + c_{pv} \frac{\partial p}{\partial V} (V_w - V^n). \quad (6.45)$$

Hierbij is c_{pv} een relaxatiefactor die op 1 kan gesteld worden. De afgeleide $\frac{\partial p}{\partial V}$ kan numeriek berekend worden als de inverse van $\frac{\partial V}{\partial p}$ waarbij uit een kleine variatie van p een variatie van V kan berekend worden. Hier hebben we echter geopteerd voor een vereenvoudigde analytische aanpak. Als schatting voor de afgeleide werd deze voor een bolvormige geometrie gebruikt met hetzelfde volume en dezelfde druk. Voor een bol is

$$p = \frac{2N}{R} \quad (6.46)$$

en voor grote rekken $\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$ en grote α is

$$N = \frac{Eh}{\alpha(1 + \nu)} e^{\alpha\varepsilon}, \quad (6.47)$$

zodat mits dezelfde veronderstelling van grote α

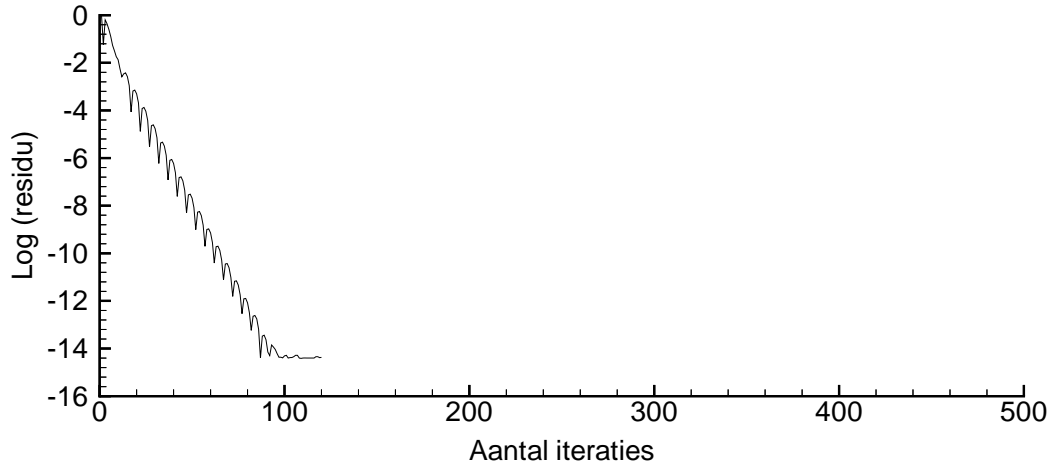
$$\frac{\partial p}{\partial R} \approx \frac{2Eh}{R_0 R (1 + \nu)} e^{\alpha \varepsilon}. \quad (6.48)$$

Hierdoor is

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{\partial p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial V} \\ &\approx \frac{2Eh}{R_0 R (1 + \nu) 4\pi R^2} e^{\alpha \varepsilon} \\ &= \frac{2Eh}{3R_0 V (1 + \nu)} e^{\alpha \varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

waarbij R_0 kan berekend worden uit V_0 of benaderd uit V . De waarde van de afgeleide heeft enkel als doel om per iteratie een aanvaardbare stap in de richting van de oplossing te zetten. De uiteindelijk berekende druk die overeenstemt met het wensvolume is daar onafhankelijk van. Deze keuze voor de afgeleide bleek in alle gevallen goed te werken.

Figuur 6.7 toont de convergentiesnelheid om de druk te berekenen die overeenstemt met een ventrikelvolume van 30 ml. De initiële toestand waarvan de iteraties werden gestart was de referentietoestand met een volume van 12 ml.



Figuur 6.7: Convergentieresultaat voor de berekening van de positie van de hartspierwand wanneer als voorwaarde een volume wordt opgegeven.

6.4 Bepaling van de parameters voor de constitutieve wetten

Om de parameters E en α te bepalen wordt gebruik gemaakt van een opgemeten druk-volume verband voor een hondenhart. Dit verband wordt getoond in tabel 6.1 [82].

Druk	Volume
mmHg	ml
0	12.0
5	31.5
10	40.0
15	46.7
20	52.0
25	56.5
30	60.0

Tabel 6.1: Druk-volume verband opgemeten in een hond.

De referentietoestand $V_0 = 12$ ml werd gekozen overeenkomstig dit verband. De bedoeling is nu om met behulp van dit opgemeten verband, waarden voor de parameters E en α te berekenen, zodat een fysiologisch druk-volume verband bekomen wordt voor het numerieke model van de hartspierwand. Daartoe worden twee punten (V_1, p_1) en (V_2, p_2) uit de tabel geselecteerd en wordt gevraagd om de twee parameters E en α zodanig te bepalen dat het druk-volume verband van het numerieke model deze twee punten bevat.

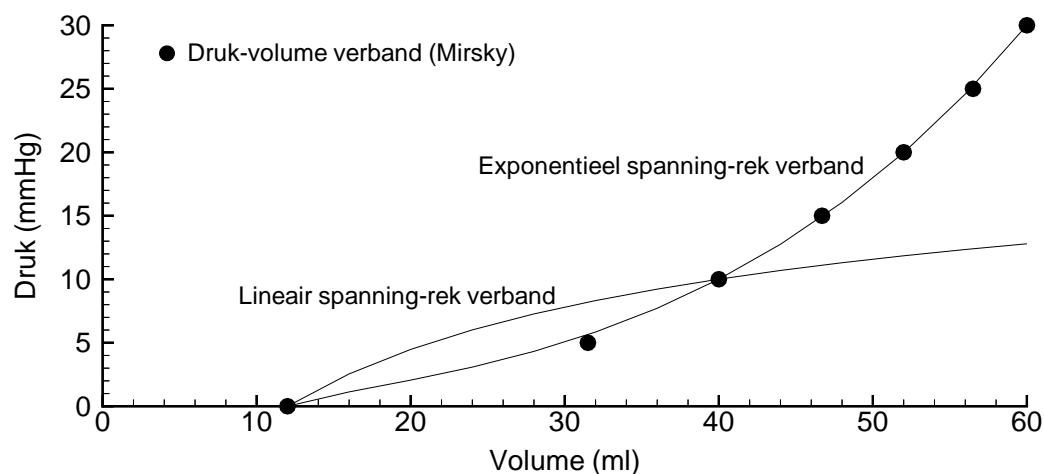
Opnieuw wordt iteratief te werk gegaan. Met een waarde van E^n en α^n na de n -de iteratie worden de drukken p_1^n en p_2^n en hun afgeleiden naar E en α numeriek berekend voor de volumes V_1 en V_2 . Een betere benadering E en α wordt dan bekomen door het oplossen van het stelsel naar E^{n+1} en α^{n+1} :

$$\begin{bmatrix} p_1 - p_1^n \\ p_2 - p_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial p_1^n}{\partial E} \right)_{V_1} & \left(\frac{\partial p_1^n}{\partial \alpha} \right)_{V_1} \\ \left(\frac{\partial p_2^n}{\partial E} \right)_{V_2} & \left(\frac{\partial p_2^n}{\partial \alpha} \right)_{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{n+1} - E^n \\ \alpha^{n+1} - \alpha^n \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Met $V_1 = 40$ ml en $V_2 = 60$ ml is $E = 709$ Pa en $\alpha = 5.35$.

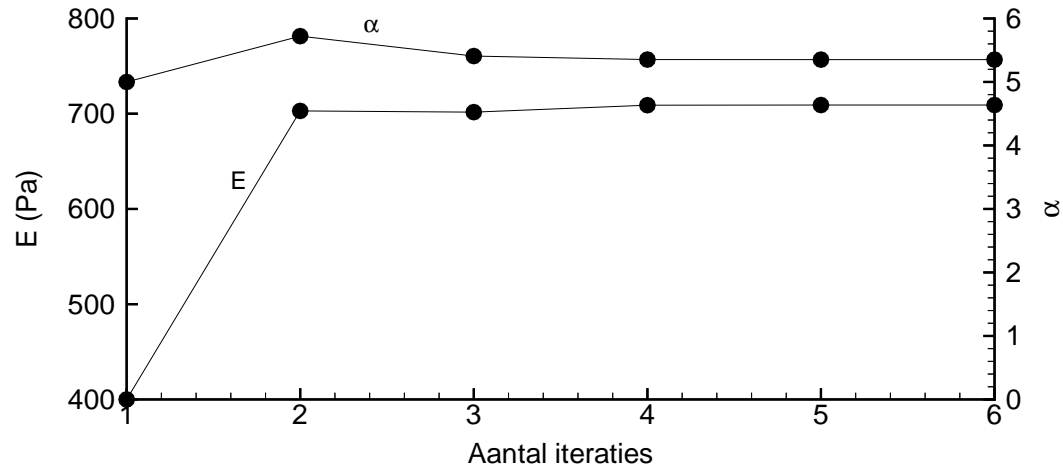
Indien een lineair verband zou gebruikt worden voor de constitutieve wet is E de enige parameter die kan bepaald worden. Er kan dan maar één punt V_1 uit de tabel gebruikt worden om E te bepalen. Met $V_1 = 40$ ml zoals hierboven is $E = 1440$ Pa.

Figuur 6.8 toont beide druk-volume verbanden vergeleken met het experimenteel druk-volume verband van tabel 6.1 [82]. Er blijkt dat met een lineaire constitutieve wet geen fysiologisch druk-volume verband kan bekomen worden. Het exponentieel verband tussen de resulterende krachten N_θ en N_ϕ enerzijds en de rekken $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$ anderzijds duidt aan dat de compliantie van de linkerventrikel afneemt naarmate het volume groter wordt.



Figuur 6.8: Vergelijking van de berekende druk-volume verbanden met het experimenteel opgemeten druk-volumeverband [82].

Figuur 6.9 toont de evolutie van de berekende waarden van de elasticiteitsmodulus E en α in functie van het aantal iteraties. Iedere iteratie wordt vergelijking (6.50) gebruikt om een volgende waarde voor E en α te bekomen. Uit de figuur blijkt dat het aantal iteraties die nodig zijn om op deze wijze de parameters te berekenen, zeer klein is.



Figuur 6.9: Evolutie van de berekende waarden voor E en α in functie van het aantal iteraties.

Hoofdstuk 7

Roostergeneratie en -manipulatie

7.1 Inleiding

Roostergeneratie omvat in het algemeen het probleem van het discretiseren van een ruimte, of het opdelen van een ruimte in afzonderlijke cellen. Het rooster kan dan gebruikt worden als structuur voor het oplossen van de stromingsvergelijkingen. In dit werk wordt gebruik gemaakt van niet-gestruktureerde roosters om de intraventriculaire ruimte te discretiseren. Een voorbeeld van een niet-gestructureerd rooster werd reeds getoond in vorig hoofdstuk (figuur 6.3). Voor een niet-gestructureerd rooster wordt expliciet bijgehouden welke knopen met elkaar verbonden worden. Het gebruik van deze verbindingsstructuur tijdens de berekeningen leidt tot bewerkingen van het type indirecte adressering. Zonder gepaste ordeningen wordt het geheugen op een willekeurige manier aangesproken. Op computers uitgerust met een hiërarchische geheugenstructuur (hoofdgeheugen versus cachegeheugen) geeft dit aanleiding tot veel cachefouten. Daardoor kan de performantie van de computer gevoelig verminderen. Deze nadelen worden gecompenseerd door een toename aan geometrische flexibiliteit, door afwezigheid van een voorgedefinieerde verbindingsstructuur.

Er zijn verschillende vormen van niet-gestructureerde roosters. In dit werk wordt gebruik gemaakt van triangulaties. Voor een gegeven verzameling punten bestaan er echter zeer veel triangulaties. Door bijvoorbeeld een punt op een andere manier te verbinden, ontstaat een andere triangulatie. De triangulatie die hier gebruikt wordt is de Delaunay-triangulatie. De definitie, gebruikte eigenschappen en de constructie van een Delaunay-triangulatie worden verder behandeld.

Door de vulling van de linkerventrikel is er een verplaatsing van de hartspierwand. Wanneer enkel de randknopen van het rooster zouden meeverplaatsen, kunnen roosters ontstaan die overlappende zijden bevatten of roosters met onregelmatige driehoeken.

Om dit te vermijden worden na de verplaatsing van de randknopen ook de interne knopen verplaatst. Het algoritme dat gebruikt wordt om deze verplaatsing te verwezenlijken, wordt in dit hoofdstuk uitvoerig behandeld.

7.2 Delaunay-triangulatie

Hoewel veel verschillende triangulaties bestaan voor een gegeven verzameling punten, in eender hoeveel ruimtedimensies, werden alleen een paar soorten triangulaties ooit gebruikt voor praktische toepassingen. Speciaal de Delaunay-triangulatie heeft bewezen een heel bruikbare triangulatietechniek te zijn. Dit deel gaat over de Delaunay-triangulatie en geeft de definitie en de gebruikte eigenschappen van deze triangulatie. Verder worden ook de gebruikte triangulatiemethodes besproken. Een meer algemeen overzicht over eigenschappen en triangulatiemethodes voor de Delaunay-triangulatie is te vinden in [1, 108].

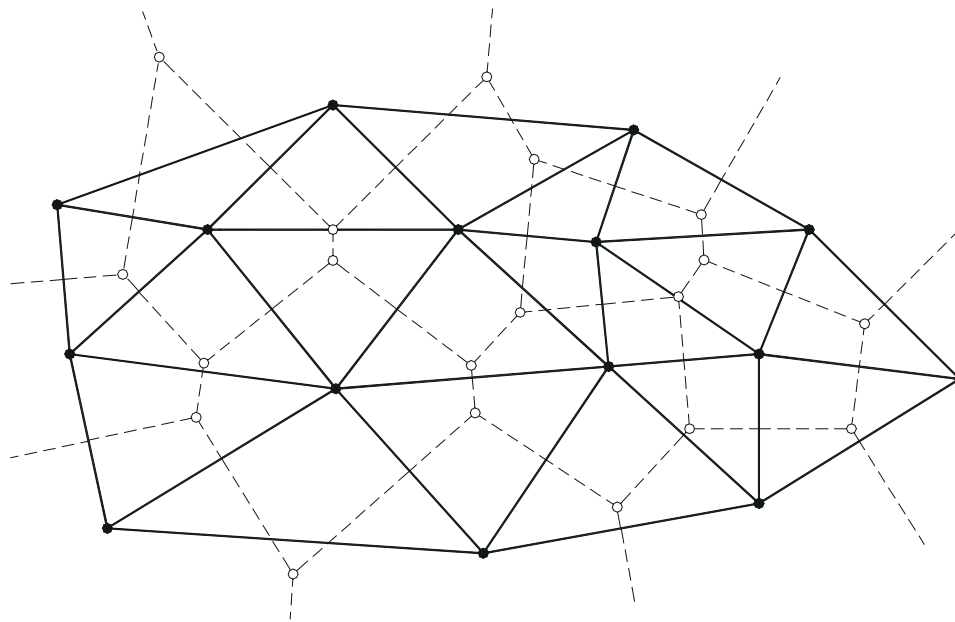
7.2.1 Voronoi-diagram en Dirichlet-constructie

De Dirichlet-constructie, ook wel Voronoi-diagram genoemd, wordt in 2D als volgt gedefinieerd.

Definitie: Stel dat de positie van n datapunten $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ uit het vlak gekend is, dan kan men aan elk punt een gebied associëren dat een deel is van het vlak, dat dichter ligt bij dat punt dan bij gelijk welk ander punt. Deze gebieden dragen de naam Dirichlet-gebieden.

De Dirichlet-gebieden zullen een patroon vormen van aaneengesloten convexe polygonen die het ganse vlak bedekken. Figuur 7.1 toont deze constructie (streeplijnen) voor een kleine verzameling punten. Sommige datapunten, diegene op de convex omhullende, hebben oneindige gebieden, de andere punten hebben eindige Dirichlet-gebieden. Uit de definitie volgt dat de rechte lijnstukken die een Dirichlet-gebied afbakenen precies op de middelloodlijn liggen van de corresponderende datapunten. Voor de definitie van de rand van een Dirichlet-gebied komen niet alle middelloodlijnen tussen van elk paar punten, enkel de *dichtste* punten helpen mee.

Deze Dirichlet-constructie of Voronoi-diagram is één van de meest fundamentele constructies die bij een verzameling discrete datapunten hoort. Deze constructie werd dan ook in verschillende disciplines onafhankelijk van elkaar ontdekt. Vanuit rekenkundig oogpunt kunnen de Voronoi-gebieden gebruikt worden voor de constructie van een convex omhullende. Ook kan de constructie gebruikt worden voor het



Figuur 7.1: Dirichlet-gebieden (streeplijnen) en bijhorende Delaunay-triangulatie (volle lijnen) van een kleine verzameling punten.

efficiënt oplossen van het dichtste-buarpuntprobleem. Een voorbeeld van Voronoi-gebieden kan ook gevonden worden in de natuurwetenschappen. Een verzameling kernen wordt gegeven waarrond kristallen kunnen groeien. Groeien ze in alle richtingen even snel, dan bekomt men op het einde een verdeling die precies overeenkomt met de Voronoi-gebieden.

Nu kan deze constructie ook gebruikt worden voor de definitie van de Delaunay-triangulatie.

Definitie: Verbindt men alle puntparen waarvan een stukje middelloodlijn een Dirichlet-gebied helpt afbakenen, dan bekomt men een triangulatie die de Delaunay-triangulatie wordt genoemd.

Hieruit volgt meteen een eigenschap. Als er geen vier punten op een cirkel liggen, dan betekent dit dat de hoekpunten van de Voronoi-gebieden de middelpunten zijn van de omschreven cirkels van de driehoeken. Dit komt omdat de hoekpunten precies op het snijpunt liggen van drie middelloodlijnen.

De Dirichlet-constructie en de Delaunay-triangulatie zijn gedefinieerd voor een willekeurig aantal dimensies. Dit geldt, op één na, ook voor de eigenschappen die nu beschreven zullen worden.

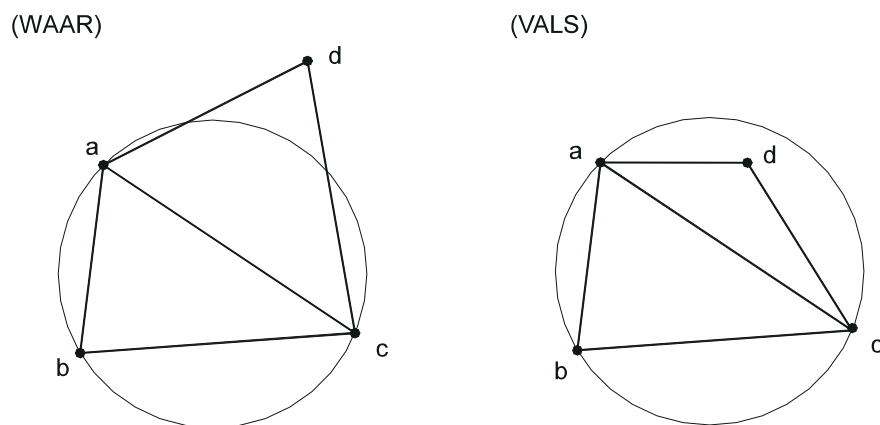
7.2.2 Gebruikte kenmerken van de Delaunay-triangulatie in twee dimensies

7.2.2a Uniciteit

Door constructie is de onderverdeling in Dirichlet-gebieden uniek. Is de bijhorende verzameling punten dusdanig dat alle hoekpunten van de Dirichlet-gebieden snijpunten zijn van hoogstens drie middelloodlijnen, dan is de bijhorende Delaunay-triangulatie ook uniek. Snijden vier of meer middelloodlijnen in één punt, dan is de Delaunay-triangulatie onbepaald, en spreekt men van een gedegenererde Delaunay-triangulatie. Om de triangulatie te vervolledigen moeten de punten, waarvan de middelloodlijnen snijden, verbonden worden. De wijze waarop dit gebeurt, is niet eenduidig bepaald. De Delaunay-triangulatie is dus uniek, op degeneraties na.

7.2.2b Omschreven cirkel criterium

Een triangulatie van een gegeven aantal punten (minstens 3) is Delaunay als en slechts als er geen enkel punt binnen de omschreven cirkel ligt van elke driehoek. In drie dimensies mag er geen enkel punt binnen de omschreven sfeer liggen van elke tetraëder. Het bewijs is eenvoudig en volgt uit het ongerijmde [107]. Dikwijls wordt deze eigenschap gebruikt om de Delaunay-triangulatie te definiëren. Hiermee kan ook de volgende test opgesteld worden die moet gelden voor de vier punten van twee aanliggende driehoeken in een Delaunay-triangulatie, figuur 7.2.



Figuur 7.2: Cirkeltest is waar (links) en vals (rechts) voor driehoek abc en punt d .

Deze test is vals als punt d binnen de omschreven cirkel ligt van driehoek abc . Deze test is equivalent met de vergelijking

$$\angle abc + \angle cda < \angle bcd + \angle bad.$$

Meer bepaald weten we dat

$$\angle abc + \angle cda \begin{cases} < 180^\circ & \text{cirkeltest waar,} \\ = 180^\circ & a, b, c, d \text{ op één cirkel,} \\ > 180^\circ & \text{cirkeltest vals.} \end{cases}$$

De keuze van de diagonaal van een vierhoek bepaalt de splitsing van de vierhoek in twee aanliggende driehoeken. Omdat de som van de hoeken van een vierhoek precies 360° bedraagt, kan men door de keuze van de andere diagonaal van de vierhoek, het resultaat van de cirkeltest omkeren.

7.2.2c Zijde-cirkel-eigenschap

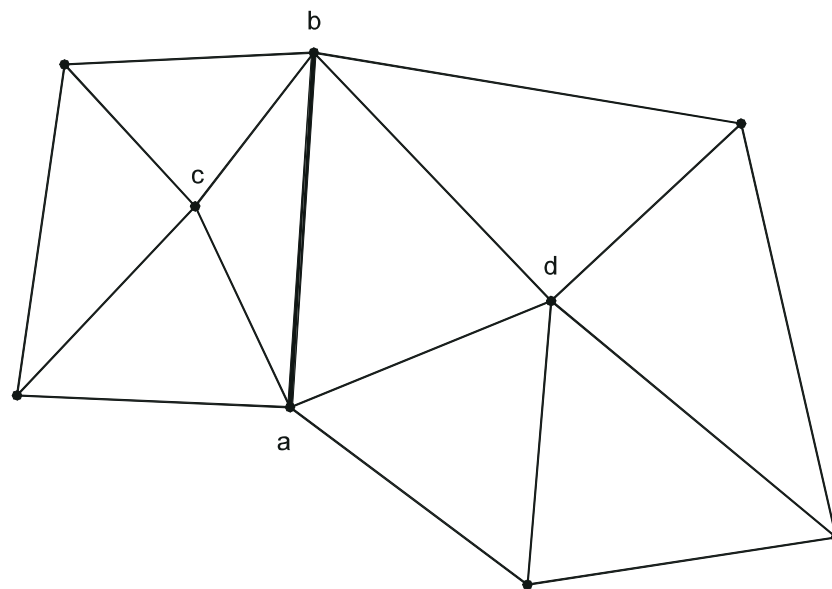
Een triangulatie van een gegeven verzameling punten is Delaunay als en slechts als er een cirkel bestaat door de eindpunten van iedere zijde waarbinnen geen enkel punt ligt. Een verzameling punten in drie dimensies is Delaunay als en slechts als er een sfeer bestaat door de eindpunten van iedere driehoek waarbinnen geen enkel punt ligt. Deze karakterisatie is handig voor de definitie van een *beperkte* Delaunay-triangulatie, waarin bepaalde zijden a priori voorgeschreven zijn.

Definitie: Een triangulatie is een beperkte Delaunay-triangulatie als er voor elke zijde van het rooster een cirkel bestaat door de eindpunten van de zijde, die geen enkel ander punt bevat dat *zichtbaar* is voor de zijde.

In figuur 7.3, is het punt d niet zichtbaar voor zijde ac door het bestaan van de opgelegde zijde ab .

7.2.2d Gelijkhoekigheid

De Delaunay-triangulatie maximaliseert de minimum hoek van de triangulatie (niet uitbreidbaar naar drie dimensies). Om deze reden wordt de Delaunay-triangulatie ook wel maxmin-triangulatie genoemd. Deze eigenschap is ook waar voor een deel van de triangulatie, bijvoorbeeld twee aanliggende driehoeken. Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt in het zijde-wisselalgoritme voorgesteld door Lawson [64], dat verderop beschreven wordt.



Figuur 7.3: Beperkte Delaunay-triangulatie. Punt d is niet zichtbaar voor ac door het bestaan van de opgelegde zijde ab .

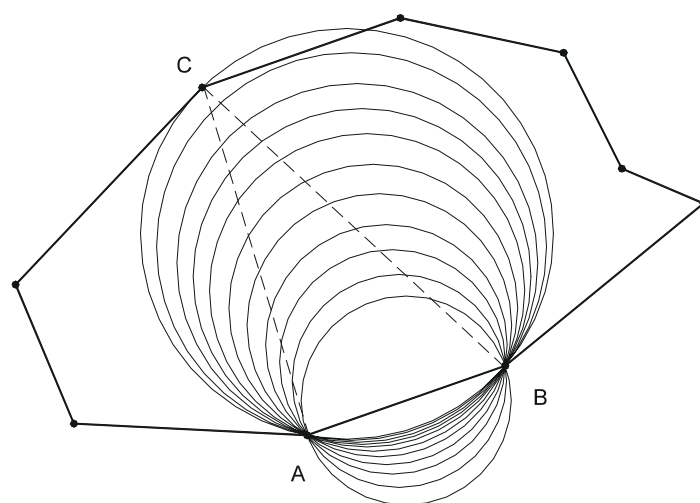
7.3 Gebruikte Delaunay-triangulatiemethodes

In dit deel worden de twee technieken besproken die gebruikt worden voor de generatie van de Delaunay-triangulatie. Hoe beide technieken worden gebruikt in de opbouw van een rooster wordt dan verder behandeld.

7.3.1 Algoritme van Tanemura-Merriam

Eén van de bestaande algoritmes voor de generatie van een Delaunay-triangulatie van een gegeven verzameling punten is de voortschrijdende-randmethode (moving front), ontwikkeld door Tanemura, Ogawa en Ogita [125], en later herontdekt door Merriam [80]. De idee is om te starten van een gegeven randzijde en deze te verbinden met een zichtbaar punt, en een driehoek te vormen. Dit kan leiden tot de generatie van twee nieuwe zijden, tenminste als ze nog niet tot een andere driehoek behoren. De nieuwe zijden zijn opnieuw randzijden van het nog niet getrianguleerde domein. Dit proces wordt herhaald tot alle punten opgenomen zijn, en alle polygonen driehoeken zijn. Omdat de rand van het te trianguleren veld steeds wordt gewijzigd stap na stap, spreekt men van een voortschrijdende rand. De randzijde wordt verbonden met een zichtbaar punt, dit betekent een punt dat kan verbonden worden met de twee eindpunten van de zijde zonder dat de nieuwe verbindingen andere zijden snijden.

Voor de constructie van een Delaunay-triangulatie moet, onder de zichtbare punten, dat punt gekozen worden met de kleinste straal van de omschreven cirkel, zie figuur 7.4. Aangezien dit punt zeker bestaat zal het algoritme convergeren. Voor de start van het algoritme moet een initiële rand gevormd worden. Opdat de uiteindelijke triangulatie de Delaunay-triangulatie zou zijn, moet de initiële rand precies de convex omhullende zijn van de gegeven verzameling te trianguleren punten. Meestal echter vertrekt men van een gegeven rand en zoekt men de beperkte Delaunay-triangulatie, dwz. met de opgegeven randzijden zeker opgenomen in de triangulatie. Dit algoritme is dan ook in staat om een beperkte Delaunay-triangulatie te genereren. Een efficiënte bepaling van het te verbinden punt, en het nagaan van de zichtbaarheid van dat punt vereist efficiënte zoekalgoritmes, en gepaste datastructuren.



Figuur 7.4: Voor de zijde AB wordt het punt gekozen dat leidt tot de kleinste omschreven cirkel.

Oorspronkelijk werd het algoritme geformuleerd voor de triangulatie van een willekeurige verzameling punten. In dit werk wordt een speciale versie van dit algoritme gebruikt. De toepassing wordt beperkt tot de generatie van een triangulatie van een polygoon, waarbij alle punten reeds opgenomen zijn in de rand van het te trianguleren gebied. Het punt van de polygoon waarmee een zijde verbonden wordt, kan dan gevonden worden door langsheen de rand te lopen.

7.3.2 Zijde-wisselalgoritme van Lawson

Dit algoritme beschreven door Lawson [64] vertrekt van een bestaande willekeurige triangulatie van de verzameling punten, en maakt daarvan een Delaunay-triangulatie door zijden te wisselen, zodat de gelijkhoekigheid van de triangulatie verbetert. De gelijkhoekigheid van een triangulatie, $A(T)$, is gedefinieerd door de ordening van hoeken $A(T) = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$ zo dat $\alpha_i \leq \alpha_j$ als $i < j$. We schrijven $A(T^*) \leq A(T)$ als $\alpha_j^* \leq \alpha_j$ en $\alpha_i^* = \alpha_i$ voor alle i , $1 \leq i < j$. Een triangulatie T , is globaal gelijkhoekig als $A(T^*) \leq A(T)$ voor alle mogelijke triangulaties T^* van een gegeven verzameling punten.

Het algoritme van Lawson beschouwt alle inwendige zijden van het rooster. Elk van deze zijden is de diagonaal van de vierhoek van de twee aanliggende driehoeken. Is de vierhoek convex, dan kan de diagonaal gewisseld worden. Dit wordt gedaan op basis van een lokaal criterium. Voor de Delaunay-triangulatie is dit de cirkeltest. Hierdoor wordt de kleinste hoek van de twee driehoeken gemaximaliseerd. Lawson's algoritme gaat door tot overal voldaan is aan dit criterium. Omdat het aantal zijden eindig is, en de gelijkhoekigheid $A(T)$ van de triangulatie steeds toeneemt, convergeert het algoritme in een eindig aantal stappen. Het aantal stappen nodig is sterk afhankelijk van de initiële triangulatie. Wanneer dit algoritme gebruikt wordt voor de generatie van een Delaunay-triangulatie kan de cirkeltest als criterium gebruikt worden. De cirkeltest voor de triangulatie met gewisselde diagonaal is dan overbodig.

Algoritme: Zijde-wisselalgoritme, Lawson.

```

zijde gewisseld := waar
doe zolang (zijde gewisseld)
  zijde gewisseld := vals
  doe voor (alle inwendige zijden)
    als (2 aanliggende driehoeken convexe vierhoek vormen) dan
      bereken criterium  $C_1$  (cirkeltest)
      bereken criterium  $C_2$  in veronderstelling dat diagonaal
        gewisseld is
      als ( $C_2$  beter dan  $C_1$ ) dan
        verwissel diagonaal
        zijde gewisseld := waar
      einde als
    einde als
  einde doe
einde doe

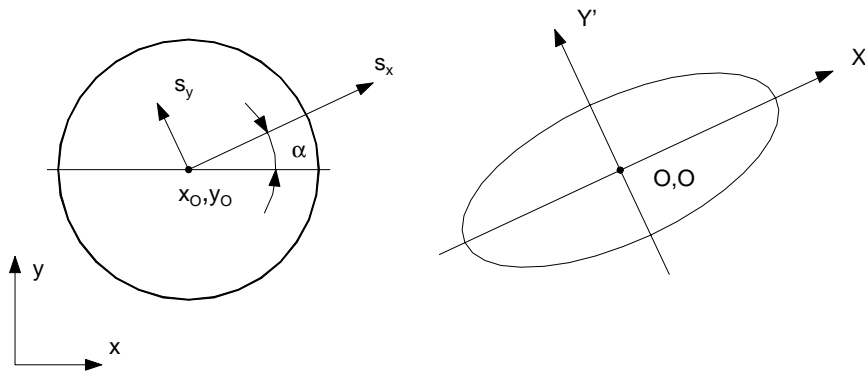
```

7.4 Lokaal geschaalde ruimte

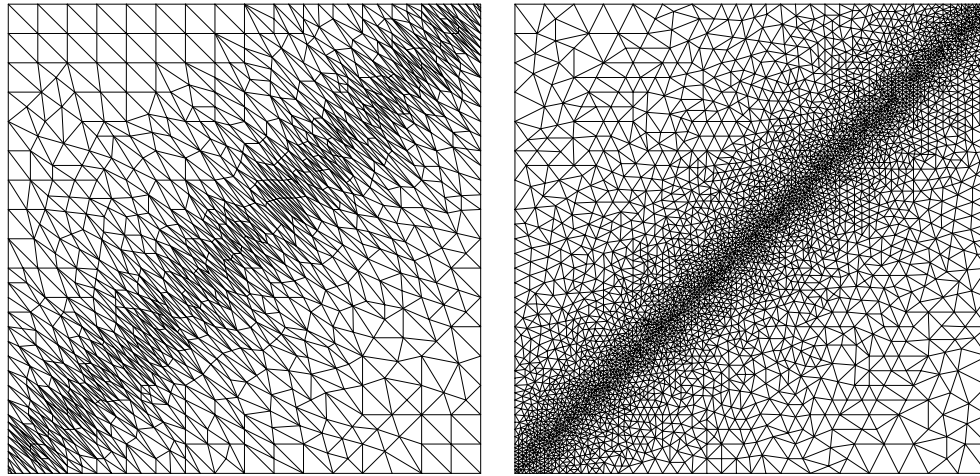
Een mogelijkheid om de connectiviteit aan te passen aan een opgegeven stromingsveld is het gebruik van een lokaal getransformeerde of geschaalde ruimte. De beschreven algoritmes voor het genereren van een Delaunay-triangulatie blijven bruikbaar, omdat ze toegepast worden in een lokaal getransformeerde ruimte. Om dit te bereiken wordt in elk punt een koördinatentransformatie gedefinieerd, bestaande uit een rotatie over een hoek α en een herschaling van de nieuwe koördinaat-assen met s_x, s_y . Alle punten worden aan deze transformatie onderworpen vóór het gekozen roostergeneratie-algoritme wordt toegepast. Met de lokale transformatie van punt x_o, y_o worden de nieuwe koördinaten van punt i gegeven door

$$\begin{aligned} x'_i &= ((x_i - x_o) \cos \alpha + (y_i - y_o) \sin \alpha) / s_x, \\ y'_i &= (-(x_i - x_o) \sin \alpha + (y_i - y_o) \cos \alpha) / s_y. \end{aligned}$$

Een cirkel in het punt x_o, y_o wordt omgevormd tot een ellips met hetzelfde middelpunt, waarvan één van de assen een hoek α maakt met de x -as, figuur 7.5. Door de verhouding s_y/s_x te laten wijzigen, worden door de Delaunay-triangulatie in de geschaalde ruimte uitgerokken driehoeken gevormd, figuur 7.6 links. Door s_x en s_y zelf wordt de lokale lengteëenheid gewijzigd. Een triangulatie waarbij alle zijden een lengte hebben kleiner of gelijk aan één in de geschaalde ruimte wordt voorgesteld in figuur 7.6 rechts.



Figuur 7.5: Een cirkel wordt door de transformatie afgebeeld op een ellips.



Figuur 7.6: Delaunay-triangulatie in een lokaal geschaalde ruimte, links met schaal-factoren $s_x = 10./(0.1 + \text{abs}(\tanh(y-x)))$, $s_y = 10.$, $\alpha = 45^\circ$, rechts met schaal-factoren $s_x = s_y = 10./(0.1 + \text{abs}(\tanh(y-x)))$, $\alpha = 45^\circ$.

7.5 Opbouw van het rooster

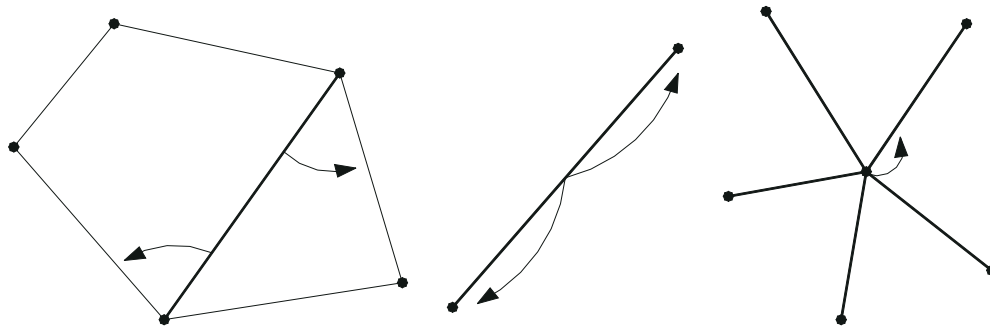
Dit deel beschrijft het uiteindelijk samengesteld roostergeneratieproces. De hiervoor beschreven technieken wordt daarvoor gebruikt. Het maken of creëren van een rooster, dat geschikt is voor stromingsberekeningen, kan men onderverdelen in een aantal fasen. Eerst dient de geometrie op een bruikbare wijze voorgesteld te worden. Daarna wordt een startrooster gevormd van het domein. In een volgende stap wordt dit startrooster verder verfijnd tot het eerste rooster ontstaat dat geschikt is voor de berekeningen. Natuurlijk zijn er voor de multigridformulering meerdere roosters nodig. Deze worden aangemaakt bij de start van de berekeningen.

Tot nog toe werd geen enkele veronderstelling gemaakt aangaande de datastructuur. Omdat dit niet langer uitgesteld kan worden, volgt eerst een beschrijving van de gebruikte datastructuur.

7.5.1 Datastructuur

De datastructuur is van het zijde-gebaseerde type. Dit wil zeggen dat de verbindingsinformatie wordt bijgehouden per zijde. Figuur 7.7 maakt dit duidelijk.

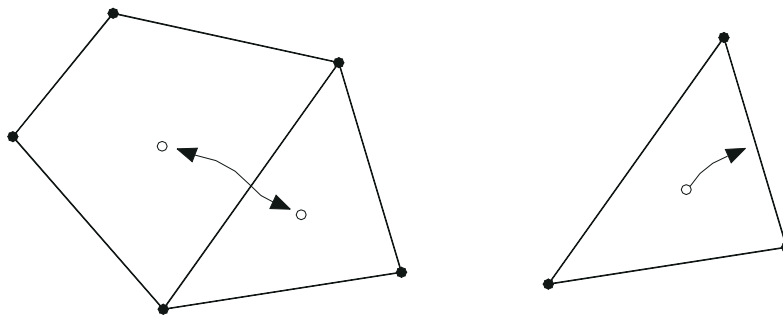
Voor elke zijde worden referenties bijgehouden naar de twee knopen die de zijde verbindt. Tevens worden ook referenties naar buurzijden onthouden. Voor elke knoop



Figuur 7.7: Abstrakte datastructuur die gebruikt wordt in de roostergeneratie. Zijde-knoop informatie.

van de zijde is er een referentie naar de eerstvolgende zijde met dezelfde knoop, bij draaiing in de tegen-wijzerzin. Naast deze lijst van zijden is er een lijst van knopen, met per knoop een referentie naar de geometrische informatie, het punt. Een punt heeft een x - en een y -koördinaat. Een rooster bestaat uit een verzameling knopen, die na elkaar zitten in de lijst van knopen, en een verzameling zijden, die na elkaar zitten in de lijst van zijden. Elke knoop heeft ook een type, dat aanduidt of de knoop een inwendige knoop of een randknoop is. In het geval van een randknoop geeft het type een verwijzing naar de randbeschrijving.

Om de beweging van het rooster mogelijk te maken, wordt een algoritme gebruikt dat ervoor zorgt dat van een rooster met overlappende zijden opnieuw een geldig rooster gemaakt wordt (zie §7.6). Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de oppervlakte van de cellen van het rooster. Een cel bezit een verwijzing naar één van zijn zijden en elke zijde bezit verwijzingen naar zijn naburige cellen (figuur 7.8).



Figuur 7.8: Abstrakte datastructuur die gebruikt wordt in de roostergeneratie. Zijde-cel informatie.

Met deze datastructuur kan per cel een lus over haar zijden geschreven worden door gebruik te maken van de cel-zijde informatie, de zijde-knoop informatie en de zijde-zijde informatie.

7.5.2 Beschrijving van de geometrie

Eén van de voordelen van de niet-gestructureerde aanpak is de mogelijkheid om complexe geometrieën te behandelen. De gebruikte beschrijving van de geometrie moet dan ook de nodige flexibiliteit toelaten.

De randbeschrijving bestaat uit een verzameling van gesloten randen. Een rand is op zich een verzameling van aaneensluitende curven. Een rand is gesloten als het eindpunt van de laatste curve samenvalt met het beginpunt van de eerste curve. Ieder begin- en eindpunt van elke curve zijn punten die in het rooster door knopen worden voorgesteld. Deze knopen mogen nooit verwijderd worden. De verbinding van deze knopen door randzijden stelt de meest elementaire vorm voor waardoor de geometrie nog kan voorgesteld worden. Deze keuze wordt bepaald door de gebruiker. Hij bepaalt in hoeveel curven de randbeschrijving wordt opgedeeld en dus ook met hoeveel randknopen de geometrie minimaal wordt voorgesteld. Elke randknoop heeft een verwijzing naar de overeenkomstige curve en onthoudt als parameter de booglengte op de curve waarmee het punt overeenstemt. Indien een randzijde verfijnd wordt, worden de twee booglengtes opgevraagd die behoren bij de twee randknopen van de randzijde. Met het gemiddelde van deze booglengtes wordt een nieuwe knoop toegevoegd op de curve. Deze verfijning van de rand wordt verder voorgesteld in figuur 7.9c.

Elke curve is zelf een verzameling van curvesegmenten. Wanneer aan de curve het punt wordt opgevraagd dat overeenstemt met een bepaalde booglengte, wordt het curvesegment opgezocht waartoe het punt moet behoren en de vraag wordt doorverwezen naar het gevonden curvesegment. Deze opsplitsing van verantwoordelijkheden tussen de verschillende componenten of klassen kan eenvoudig worden verwezenlijkt met een object georiënteerde programmastructuur. Voor de implementatie van de in dit werk ontwikkelde algoritmes wordt gekozen voor de object georiënteerde taal C++. Het volgende voorbeeld toont de routine die een punt opvraagt met als parameter de booglengte :

```
Point Klasse::point(double s) const;
```

waarbij *s* de booglengte voorstelt. De benaming *Klasse* duidt aan dat deze routine in verschillende klassen gedefinieerd is. Wanneer de routine wordt aangeroepen voor een curve zal een andere actie gebeuren dan wanneer de routine aangeroepen wordt voor een lijnstuk. Een curve weet niet uit welke soort curvesegmenten ze zal bestaan en weet dus ook niet hoe het verloop van elk curvesegment tussen begin- en eindpunt er uit ziet. Een curve is immers slechts een verzameling van de curvesegmenten en door de lengte op te vragen van de segmenten kan de curve detecteren in welk segment het gevraagde punt ligt. Van zodra het segment gedetecteerd is, is de taak voor curve afgelopen en de verantwoordelijkheid wordt overgedragen naar het gevonden segment.

In het geval van een lijnstuk wordt dan bijvoorbeeld een lineaire interpolatie gedaan tussen begin- en eindpunt. Dit wordt verder getoond.

Programma 7.1 *Deel van de bestanden : Curve.h en Curve.cpp*

```
class CurveSeg;

class Curve {
private:
    DynArray<CurveSeg*> seglst;
    double len;
    ...
public:
    double length() const { return len; }
    Point point(double s) const;
    void add(CurveSeg& cs);
    ...
};

Point Curve::point(double s) const
{
    int n = seglst.size();
    if (!n) return RangeError("Curve",s,0,-1);
    if (s==0) return seglst[0]->point(0);
    if (s<0) return seglst[n-1]->point(-1);
    double sn = s;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        double len = seglst[i]->length(); // opvragen lengte segment
        if (s > len) s-=len;
        else break;
    }
    if (i==n) throw RangeError("Curve",sn,0,length());
    return seglst[i]->point(s); // verantwoordelijkheid
                                // overdragen naar segment
}

...
```

Een curve houdt dus een dynamische lijst bij van verwijzingen naar de curvesegmenten waaruit de curve is opgebouwd. Deze curvesegmenten moeten voldoen aan bepaalde eisen. Deze eisen worden vervat in de abstracte basisklasse waarvan elk curvesegment dient afgeleid te worden. Alle afgeleide klassen van de basisklasse

stockeren immers intern een type (dit wordt in C++ door de compiler gedaan en de programmeur hoeft er zich niet om te bekommeren). Wanneer nu een virtuele functie wordt aangeroepen, zoals het opvragen van de lengte van het segment of het overdragen van de verantwoordelijkheid voor de bepaling van het gevraagde punt, dan wordt afhankelijk van het type de overeenkomstige functie aangeroepen die hoort bij dat type. Wanneer een curve bijvoorbeeld is opgebouwd uit een lijnstuk en een boog, zal dus bij het doorlopen van de lus in programma 7.1 eerst de lengte van het lijnstuk opgevraagd worden en nadien de lengte van een boog. Dit zijn dus verschillende functies die worden aangeroepen en tijdens de uitvoering van het programma wordt beslist welke functies worden aangeroepen. Dit kan enkel doordat er intern een test gebeurt naar het type van de afgeleide klasse (lijnstuk of boog). De gebruikte functies van de abstracte basisklasse worden getoond in 7.2.

Programma 7.2 *Deel van het bestand : CurveSeg.h*

```
class CurveSeg {
public:
    virtual double length() const = 0;
    virtual Point point(double s) const = 0;
    ...
};
```

De syntax '= 0' duidt aan dat elk curvesegment dat afgeleid wordt van deze basisklasse verplicht wordt om de beschreven virtuele functies (length en point) te definiëren. De klasse die een lijnstuk beschrijft en die afgeleid is van de basisklasse curvesegment, ziet er dan bijvoorbeeld als volgt uit :

Programma 7.3 *Deel van de bestanden : Line.h en Line.cpp*

```
class Line : public CurveSeg {
private:
    Point p1, p2;
    double len;
    ...
public:
    Line(const Point& pp1, const Point& pp2) : p1(pp1), p2(pp2)
        { len = abs(p1-p2); } // Constructor
    virtual double length() const { return len; }
    virtual Point point(double s) const;
    ...
};
```

```

Point Line::point(double s) const
{
    if (s==0) return p1;
    if (s<0) return p2;
    if (s>len) throw RangeError("Line",s,0,len);
    double t2 = s/len;
    double t1 = 1-t2;
    return p1*t1 + p2*t2;
}

...

```

Een lijnstuk kan dus enkel aangemaakt worden (constructor) door begin- en eindpunt op te geven. Bij constructie van het lijnstuk wordt onmiddellijk de lengte berekend en bewaard, zodat het aanroepen van de functie die de lengte opvraagt zeer snel gebeurt (zonder berekeningen) en steeds het juiste resultaat geeft.

Volgend voorbeeld maakt alles veel duidelijker. Er wordt een curve gemaakt, bestaande uit een lijnstuk en een boog. Eerst worden de punten gedefinieerd, nadien het lijnstuk en de boog. Bij het toevoegen van de segmenten aan de curve wordt nagekeken of beide segmenten aansluiten. Dit gebeurt intern bij het uitvoeren van de functie

```
void Curve::add(CurveSeg&);
```

Wanneer de curve samengesteld is, wordt de booglengte van de curve opgevraagd en het punt dat overeenstemt met de halve booglengte. De syntax van het voorbeeldprogramma wordt beschreven in 7.4.

Programma 7.4 *Voorbeeld van het gebruik van de randbeschrijving*

```

Curve c;

Point p1(0,0);
Point p2(1,0);
Point p3(2,1);
Point center(1,1);

Line a(p1,p2);
c.add(a);

```

```

Arc b(p2,p3,center,ARCounterClockwise);
c.add(b);

double curvelen = c.length(); // opvragen booglengte van curve
Point p = c.point(0.5 * curvelen); // opvragen van punt
                                     // op halve booglengte

```

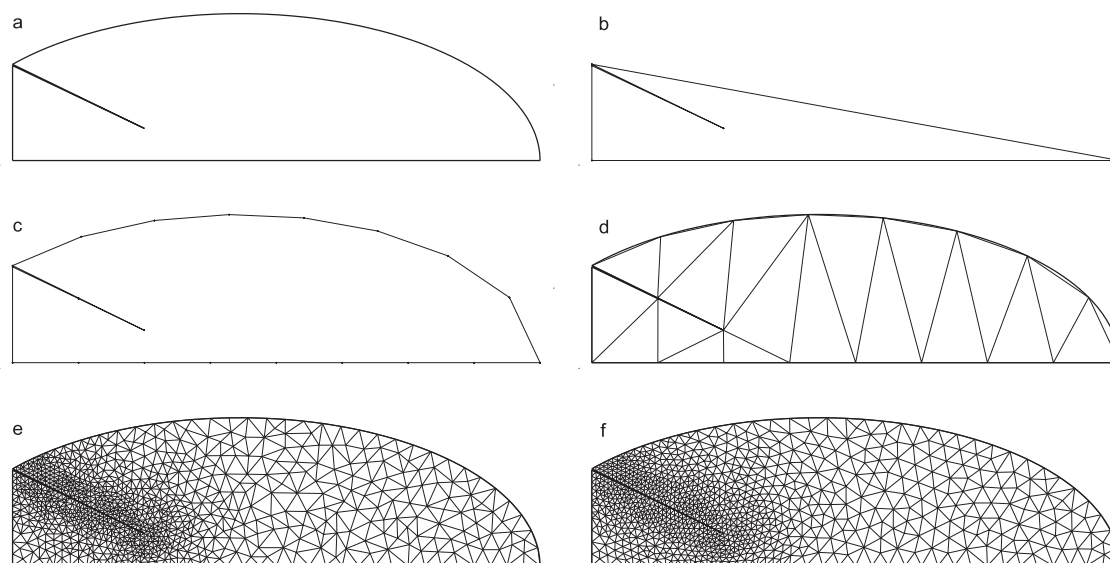
De gebruikte voorstelling voor de randbeschrijving van de ventrikel in de referentie-toestand is een afgeknotte omwentelingsellipsoïde (zie §6.2.1). De voorstelling in twee dimensies bestaat uit een lijnstuk voor de symmetrie-as, een deel van een ellips voor de hartspierwand en een lijnstuk dat de inlaat beschrijft ter hoogte van de mitraalklep. Echter van zodra de ventrikel wordt gevuld, kan de hartspierwand niet meer beschreven worden door een ellips. Er wordt dan gebruik gemaakt van een spline. Deze spline is ook afgeleid van de basisklasse `curvesegment` en wordt beschreven in appendix B.

7.5.3 Constructie van het rooster

Met behulp van de randbeschrijving (figuur 7.9a) wordt het startrooster gedefinieerd. Dit rooster bestaat uit één cel, één polygonale, niet noodzakelijk convexe cel (figuur 7.9b). Het is wel nodig dat deze ene cel, en later ook alle andere cellen van het rooster enkelvoudig geconnecteerd zijn. Dit betekent dat alle randzijden kunnen bezocht worden door het volgen van buurzijdereferenties. Is het gebied niet enkelvoudig geconnecteerd, dan kan dit toch beschreven worden door een enkelvoudig geconnecteerde polygoon, door de invoering van extra zijden, die de meervoudige connecties verbreken. De zijden van deze polygonale cel worden gevormd door verbinding van het eerste met het laatste punt van elke curve. In dit werk wordt aangenomen dat dit startrooster, het rooster is met het kleinste aantal punten dat nog steeds de geometrie beschrijft. Dit zijn de punten die nooit verwijderd mogen worden uit het rooster.

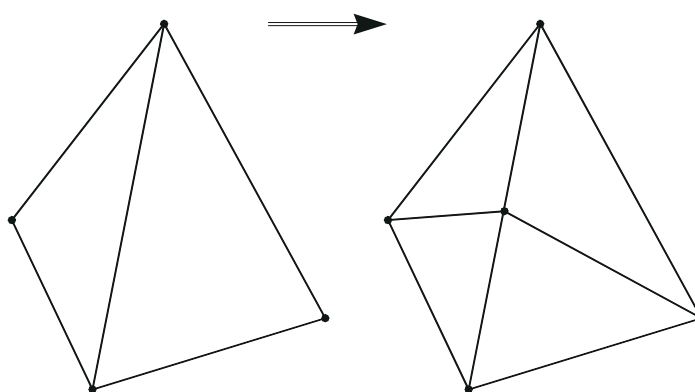
In een volgende stap kan de rand verfijnd worden (figuur 7.9c). Deze stap is evenwel niet noodzakelijk maar toont dat wanneer een randzijde verfijnd wordt er een nieuwe knoop wordt toegevoegd op de randbeschrijving met als booglengte de gemiddelde booglengte van de knopen van de randzijde.

In de volgende stap wordt de polygonale cel getrianguleerd, (figuur 7.9d). Dit wordt gedaan met een vereenvoudigde versie van het Tanemura-Merriam-algoritme. Alle punten die verbonden moeten worden, liggen immers op de rand van de polygoon. Met dit algoritme wordt de beperkte Delaunay-triangulatie gekonstrueerd. De randzijden van de polygoon blijven bestaan. Met behulp van een schalingsdefinitie is het mogelijk de lokale transformatieparameters in elk punt te bepalen.



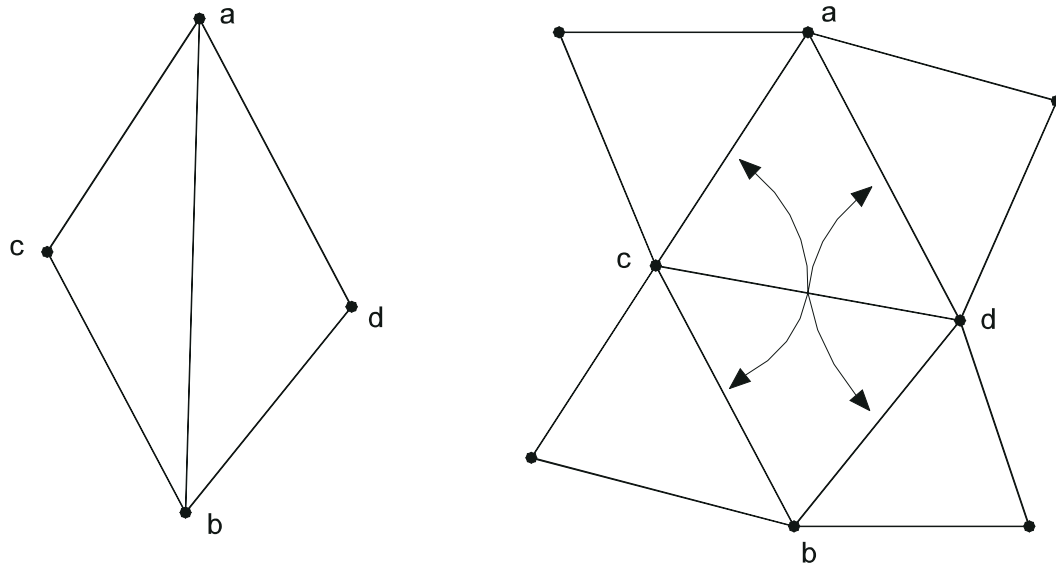
Figuur 7.9: Opbouw van het rooster. a : Randbeschrijving. b : Startrooster bestaande uit één cel, met het minimum aantal punten dat nog steeds de geometrie beschrijft. c : Verfijning van de rand. d : Triangulatie van de polygonale cel (c). e : Triangulatie met de gewenste punt dichtheid, bekomen na verfijning van rooster (d). f : Eindrooster van de procedure bekomen door gladding van rooster (e).

De triangulatie wordt nu verder verfijnd door het toevoegen van punten, tot de opgegeven roosterafstand in alle punten bereikt wordt. Met andere woorden, tot de lengte in de lokaal getransformeerde ruimte van alle zijden kleiner is dan één. Deze procedure leidt tot het rooster van figuur 7.9e. De procedure bevat een lus over alle zijden, maar telkens wanneer een zijde gevonden wordt die te lang is, wordt een punt in het midden van de zijde toegevoegd. Dit wordt geïllustreerd in figuur 7.10.



Figuur 7.10: Bij het verfijnen van een zijde wordt de zijde vervangen door vier nieuwe zijden.

Nadat het punt is toegevoegd en de nieuwe zijden gevormd zijn wordt onmiddellijk de Delaunay-triangulatie hersteld in de lokaal geschaalde ruimte. Dit gebeurt door toepassing van een lokale-diagonaalwisselalgoritme dat de cirkeltest gebruikt als criterium (zie §7.2.2b). Dit algoritme wordt recursief gebruikt, zodat wanneer een diagonaal van een vierhoek gewisseld wordt de vier zijden van de vierhoek ook onderworpen worden aan het algoritme (figuur 7.11).



Figuur 7.11: Lokale diagonaalwissel met recursiviteit.

Merk opnieuw op dat wanneer een randzijde verfijnd wordt, de nieuwe randknoop op de randbeschrijving komt te liggen. Dit gebeurt automatisch door het gebruik van de virtuele functies die in de vorige paragraaf beschreven werden.

Deze procedure leidt tot een triangulatie die afhangt van de volgorde waarin de zijden geëvalueerd worden. De lus over zijden wordt herhaald tot de lengte van alle zijden voldoen. Het op deze manier bekomen rooster wordt gegeven in figuur 7.9e.

Na het toevoegen van alle punten wordt het rooster *gladder* gemaakt. Dit gebeurt door toepassing van het algoritme dat de beweging van het rooster bepaald (§7.6). Na een aantal iteraties van de gladder is het mogelijk dat de triangulatie niet meer voldoet aan de Delaunay-eigenschap. Daarom wordt na een te kiezen aantal iteraties het zijde-wisselalgoritme van Lawson toegepast. Het algoritme wordt toegepast in een lokaal geschaalde ruimte. Het uiteindelijke rooster van deze procedure wordt gegeven in figuur 7.9f.

7.6 Beweging van het rooster

7.6.1 Inleiding

Wanneer bij een stromingsberekening de rand van de geometrie meebeweegt, zoals dit het geval is bij het vullen van de linkerventrikel, dan moet het rooster waarop de stromingsvergelijkingen gediscretiseerd worden ook meebewegen. Een mogelijke aanpak die reeds met succes wordt toegepast maakt gebruik van Chimera-roosters. Rond elke individuele geometrische component wordt een typisch gestructureerd rooster gelegd dat kan bewegen onafhankelijk van de andere deelroosters. De verschillende deelroosters overlappen en vormen samen het eigenlijke rooster. Met deze techniek werden reeds driedimensionale viskeuze stromingsberekeningen met bewegende roosters uitgevoerd zoals vermeld staan in Bunning et al. [11].

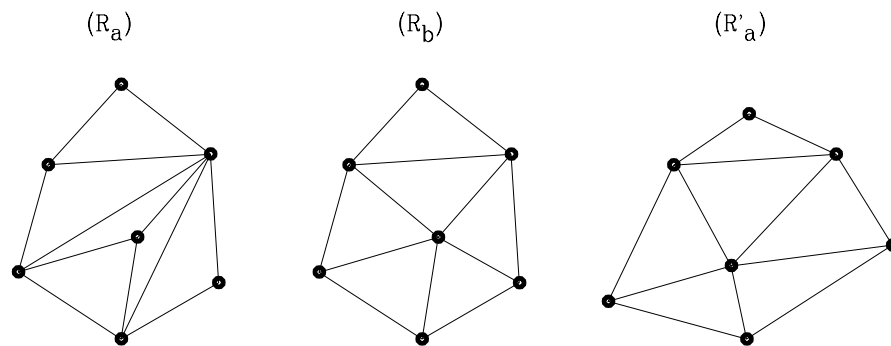
De aanpak die gebruikt wordt door Formaggia, Peraire and Morgan [35] werd toegepast voor de berekening van tweedimensionale transiënte stromingen met bewegende wanden. Hun sequentie van niet-gestructureerde roosters werd gegenereerd door telkens een deel van het rooster te regenereren. Elke tijdstap wordt de plaats van de punten op de bewegende randen herbepaald. Hierdoor wijkt de vorm van een aantal driehoeken zodanig af van de optimale vorm dat ze verwijderd worden uit het rooster. Hierdoor ontstaan holtes in het rooster die opnieuw getrianguleerd worden. De oplossing op het nieuwe rooster wordt bepaald door interpolatie op het oude rooster. Dezelfde aanpak wordt gevolgd door Löhner [71].

Een andere techniek in roostergeneratie voor bewegende randen maakt gebruik van roosters met dezelfde connectiviteit. Twee roosters op verschillende tijdstippen hebben hetzelfde aantal knopen op dezelfde manier verbonden, maar met verschillende coördinaten. Uit de verplaatsing van de wand volgt een voorgeschreven verplaatsing van de randknopen. Deze verplaatsing van de randknopen wordt dan als randvoorwaarde gebruikt voor een probleem dat de verplaatsing van de interne knopen bepaalt. De operator die de verplaatsing van de interne knopen beschrijft kan zo eenvoudig als een Laplace-operator zijn (Trépanier et al. [131], Batina [2] en Palmerio [94]) of een meer complexe pseudo-elasticiteitsoperator zoals gebruikt wordt door Mer en Nkonga [79], of een pseudo-drukoperator zoals vermeld wordt door Palmerio [94]. Bij gebruik van roosters met dezelfde connectiviteit, ten minste gedurende één tijdstap, kunnen de behoudswetten uitgedrukt worden op de Lagrangiaanse-Euleriaanse wijze. Hierbij wordt de conservativiteit uitgedrukt voor een controlevolume dat bestaat en beweegt in de tijd. Het is deze aanpak die gevolgd wordt in dit werk.

7.6.2 Beschrijving van de methode

Wanneer de stromingsvergelijkingen gediscretiseerd worden op Lagrangiaanse-Euleriaanse wijze, is er voor iedere tijdstap een rooster nodig dat geldig blijft gedurende die tijdstap. Dit betekent dat er geen overlappende driehoeken mogen ontstaan in het rooster wanneer dit beweegt. Verder dient het rooster op het nieuwe tijdstip dezelfde connectiviteit te bezitten als het rooster op het oude tijdstip. Om grote vervormingen aan te kunnen tussen meerdere tijdstappen is het wel nodig dat knopen worden toegevoegd of verwijderd. Dit dient dan te gebeuren tussen de berekening van twee tijdstappen in.

Het probleem dat de positie van de roosterknopen op het nieuwe tijdstip bepaalt kan als volgt geformuleerd worden. Gegeven de oplossing van het stromingsprobleem op een bepaald ogenblik in de tijd t op een rooster R_a , en een nieuwe positie van de rand op het tijdstip $t + \Delta t$, bepaal een nieuw rooster R_b op ogenblik t , en een nieuw rooster R'_a op ogenblik $t + \Delta t$, waarbij de roosters R_b en R'_a dezelfde connectiviteit bezitten en R_a en R_b zoveel knopen gemeenschappelijk hebben als mogelijk. Dit wordt geïllustreerd in figuur 7.12.

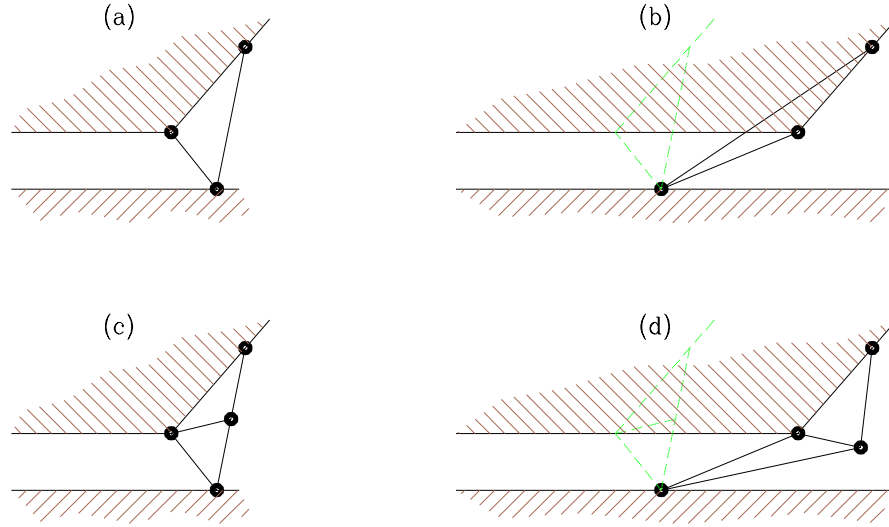


Figuur 7.12: R_a : rooster op tijdstip t . R_b : nieuw rooster op tijdstip t . R'_a : nieuw rooster op tijdstip $t + \Delta t$.

Het rooster R_b wordt geconstrueerd door aanpassing van het rooster R_a . Daar toe wordt van het rooster R_a eerst een Delaunay-triangulatie gemaakt in de lokaal geschaalde ruimte door het omwisselen van zijden. Hierdoor blijven de posities van de knopen onveranderd. Nadien kan er indien nodig een roosterverfijning of -vergroving doorgevoerd worden zodat de roosterdichtheid overeenstemt met lokaal gespecificeerde roosterschalingsfactoren.

Aangezien de roosters R_a en R_b beide op hetzelfde ogenblik gelden, kan de stromingstoestand tussen deze twee roosters geïnterpoleerd worden. Om de stromingstoestand te bepalen op rooster R'_a uitgaande van de gekende toestand op rooster R_b moeten de Navier-Stokes-vergelijkingen geïntegreerd worden.

Om het rooster R_b te construeren, vertrekkende van rooster R_a moet met volgende aspecten rekening worden gehouden. Om interpolatiefouten te vermijden is het wenselijk dat beide roosters zoveel mogelijk knopen gemeenschappelijk bezitten. Aan de andere kant wordt de connectiviteit van het rooster R_b vastgehouden gedurende de eerstkomende tijdstap. Daarom kan het rooster R_b niet op willekeurige wijze geconnecteerd zijn. Dit is duidelijk wanneer twee knopen op verschillende randen met elkaar zijn geconnecteerd, zoals wordt getoond in figuur 7.13a en 7.13b. Indien een knoop wordt toegevoegd (figuur 7.13c) wordt de ongeldige situatie meestal verholpen (figuur 7.13d).

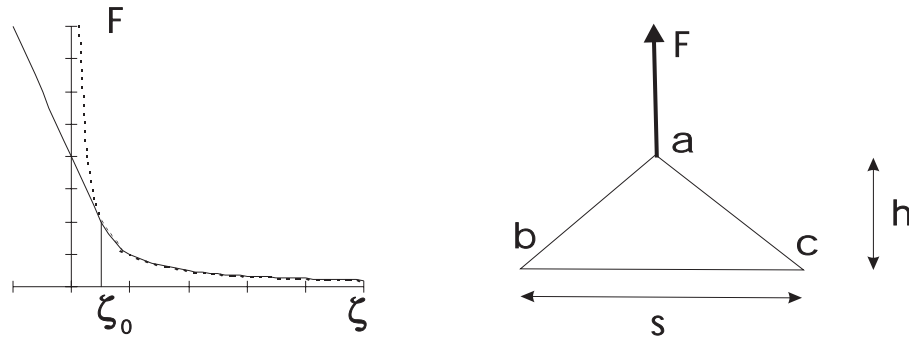


Figuur 7.13: a: Twee knopen op verschillende randen geconnecteerd. b: Idem als (a) maar met bewogen rand, ongeldige configuratie. c: Connectiviteit van de randknopen is verbroken door een knoop toe te voegen. d: Idem als (c) maar met bewogen rand, geldige configuratie.

Om het rooster R'_a te construeren uitgaande van het rooster R_b kunnen wordt verondersteld dat de positie van de randknopen van het rooster R'_a opgegeven is. Enkel de interne knopen dienen verplaatst te worden maar de connectiviteit moet behouden blijven. Verder mogen geen overlappende driehoeken in het rooster R'_a optreden. Om dit te bekomen wordt per knoop een krachterevenwicht uitgedrukt. De posities van de knopen van het rooster R'_a moeten dan zo bepaald worden dat de som van alle krachten die op een knoop werken nul is :

$$\sum \underline{F}_a = 0. \quad (7.1)$$

De som wordt genomen over alle aanliggende driehoeken van knoop a .



Figuur 7.14: Kracht die driehoek abc uitoefent op knoop a .

De kracht \underline{F}_a die de driehoek abc (zie figuur 7.14) op knoop a uitoefent, wordt met $\zeta = h_a/s_a$, waarbij h_a de hoogte of de driehoek is en s_a de lengte van de zijde bc , gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \underline{F}_a &= \frac{1}{\zeta} \underline{e}_s \quad \text{als } \zeta > \zeta_0, \\ \underline{F}_a &= \left(\frac{2}{\zeta_0} - \frac{\zeta}{\zeta_0^2} \right) \underline{e}_s \quad \text{als } \zeta \leq \zeta_0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

waarbij \underline{e}_s de eenheidsvector is loodrecht op de zijde bc in de richting van knoop a .

De hoogte, die positief is voor een geldige driehoek, maar negatief is voor een omgeklapte driehoek, wordt berekend als

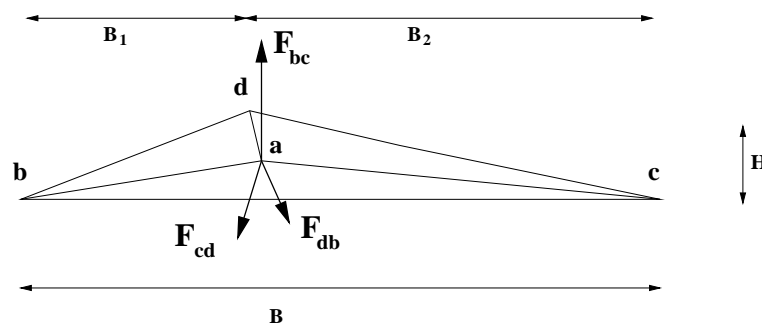
$$h_a = \frac{2A}{s_a}, \quad A = \sum \frac{x_i + x_{i+1}}{2} (y_{i+1} - y_i). \quad (7.3)$$

Hierbij is A de georiënteerde oppervlakte van de driehoek en de som wordt genomen over de zijden van de driehoek lopende tegen klokwijzerzin. Hierbij dienen alle lengtematen en oppervlakten berekend te worden na schaling van de driehoek met de lokale transformatieparameters.

Tijdens het constructieproces van rooster R'_a startend van het rooster R_b waarbij de randknopen verplaatst werden naar hun nieuwe opgelegde positie, zijn de interne knopen niet in hun evenwichtspositie. Het is zelfs mogelijk dat door de verplaatsing van de randknopen een aantal driehoeken initieel omgeklapt worden, zodat een aantal zijden snijden en een aantal driehoeken een negatieve oppervlakte hebben. Startend van deze oude, zelfs niet altijd geldige positie van de interne knopen, wordt een iteratieproces opgezet die de knopen naar hun evenwichtspositie brengen.

De parameter ζ_0 werd enkel geïntroduceerd om negatieve waarden van ζ en dus negatieve oppervlakten toe te laten gedurende de berekening. De oplossing van het roosterverplaatsingsprobleem zou echter onafhankelijk moeten zijn van de waarde van ζ_0 . Dit kan indien $\zeta > \zeta_0$. Dit kan bereikt worden door ζ_0 voldoende klein te kiezen.

7.6.3 Keuze van ζ_0



Figuur 7.15: ζ_0 moet gekozen worden zodat knoop a zich in de omringende polygoon bcd bevindt.

Beschouw de polygoon bcd rond knoop a (figuur 7.15). De krachten die op knoop a werken zijn \underline{F}_{bc} , \underline{F}_{cd} en \underline{F}_{db} . Driehoek abc zal positief blijven indien knoop a binnenin de polygoon bcd blijft. Indien knoop a beweegt door de zijde bc , zal hij terug in de polygoon geduwd worden als

$$|E_{bc}| > |E_{cd}| + |E_{db}|. \quad (7.4)$$

Dit is een voldoende voorwaarde om de driehoek positief te houden. Als knoop a gelegen is op zijde bc , dan is $\zeta = 0$ voor de driehoek abc , zodat rekening houdend met vergelijking (7.2):

$$|E_{bc}| = 2/\zeta_0. \quad (7.5)$$

In dit geval worden de krachten gegeven door

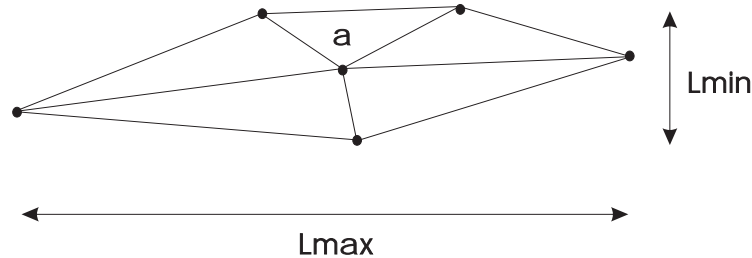
$$|\underline{F}_{cd}| = \frac{B_2}{H}, \quad |\underline{F}_{db}| = \frac{B_1}{H}. \quad (7.6)$$

Door voorgaande vergelijkingen te combineren, blijkt dat de driehoek abc positief blijft indien

$$\frac{2}{\zeta_0^*} > \frac{B_1 + B_2}{H} = \frac{B}{H}. \quad (7.7)$$

Deze discussie kan herhaald worden voor polygoenen die meer dan drie knopen bevatten, maar de resultaten zullen identisch zijn. In de meeste gevallen is de voorwaarde (7.7) veel te sterk.

Hieruit kan besloten worden dat in evenwicht alle driehoeken positief zullen zijn als ζ_0 zo wordt gekozen dat $\zeta_0 < 2L_{\min}/L_{\max}$ met L_{\min} en L_{\max} gedefinieerd als de minimum en maximum lengte van de kleinste rechthoek die de polygoon omsluit (zie figuur 7.16). Een typische waarde voor ζ_0 is $1/100$.



Figuur 7.16: Polygoon rond knoop a met aanduiding van de waarden L_{\max} en L_{\min} .

7.6.4 Oplossingsmethode

Omdat het rooster moet verplaatsen gedurende elke tijdstap is een efficiënte oplossingsmethode nodig om de oplossing te vinden van het stelsel van vergelijkingen (7.1). Hiervoor wordt gebruik gemaakt van Jacobi iteraties om de verplaatsingen te bepalen. Hiervoor dient het stelsel van vergelijkingen voor het krachteenevenwicht gelineariseerd te worden. Dit gebeurt met een Newton-linearisatie. Deze methode wordt beschreven in de volgende paragraaf. Om de methode nog te versnellen kan gebruik gemaakt worden van grovere roosters en geneste iteraties. Hoe dit in zijn werk gaat, wordt nadien uitgelegd.

7.6.4a Jacobi iteraties na Newton linearisatie

Het stelsel van vergelijkingen die het krachteenevenwicht uitdrukken is een niet-lineair stelsel in functie van de posities van de knopen van het rooster. Om het stelsel op te lossen wordt eerst een Newton-linearisatie doorgevoerd. Het lineaire stelsel kan dan iteratief opgelost worden met de Jacobi methode. Hierbij wordt de blokdiagonaal van het stelsel gebruikt om telkens een betere schatting te bepalen voor de posities van de knopen. Na elke Jacobi iteratie wordt de linearisatie herberekend.

Het 2 bij 2 stelsel dat tijdens elke iteratie per knoop wordt opgelost ziet er als volgt uit :

$$\sum \underline{F}_a + \sum \frac{\partial \underline{F}_a}{\partial \underline{x}_a} (\underline{x} - \underline{x}_a) = 0, \quad (7.8)$$

waarbij de som wordt genomen over alle aanliggende driehoeken van knoop a .

Beschouw opnieuw de driehoek abc uit figuur 7.14. De bijdrage $\underline{F}_a (F_{a_x}, F_{a_y})$ van deze driehoek in het krachtenevenwicht is voor het geval $\zeta > \zeta_0$

$$\begin{aligned} F_{a_x} &= \frac{y_b - y_c}{s_a \zeta}, \\ F_{a_y} &= \frac{x_c - x_b}{s_a \zeta} \end{aligned} \quad (7.9)$$

en voor het geval $\zeta \leq \zeta_0$ is

$$\begin{aligned} F_{a_x} &= \frac{y_b - y_c}{s_a} \left(\frac{2}{\zeta_0} - \frac{1}{\zeta_0^2} \right), \\ F_{a_y} &= \frac{x_c - x_b}{s_a} \left(\frac{2}{\zeta_0} - \frac{1}{\zeta_0^2} \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

De elementen van de Jacobiaan $\frac{\partial \underline{F}_a}{\partial \underline{x}_a}$ worden in het geval $\zeta > \zeta_0$ gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{a_x}}{\partial x_a} &= -\frac{(y_b - y_c)^2}{s_a^3 \zeta^2}, \\ \frac{\partial F_{a_x}}{\partial y_a} &= -\frac{(y_b - y_c)(x_c - x_b)}{s_a^3 \zeta^2}, \\ \frac{\partial F_{a_y}}{\partial x_a} &= -\frac{(y_b - y_c)(x_c - x_b)}{s_a^3 \zeta^2}, \\ \frac{\partial F_{a_y}}{\partial y_a} &= -\frac{(x_c - x_b)^2}{s_a^3 \zeta^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

en voor $\zeta \leq \zeta_0$ moet ζ vervangen worden door ζ_0 in bovenstaande uitdrukkingen. Het is dus duidelijk dat de Jacobiaan continu is bij doorgang van ζ door ζ_0 .

Het oplossen van vergelijking (7.8) per iteratie bepaalt een nieuwe positie van de roosterknopen. Met deze nieuwe positie worden de krachten in de knopen en de uitdrukkingen van de Jacobiaan per knoop opnieuw berekend.

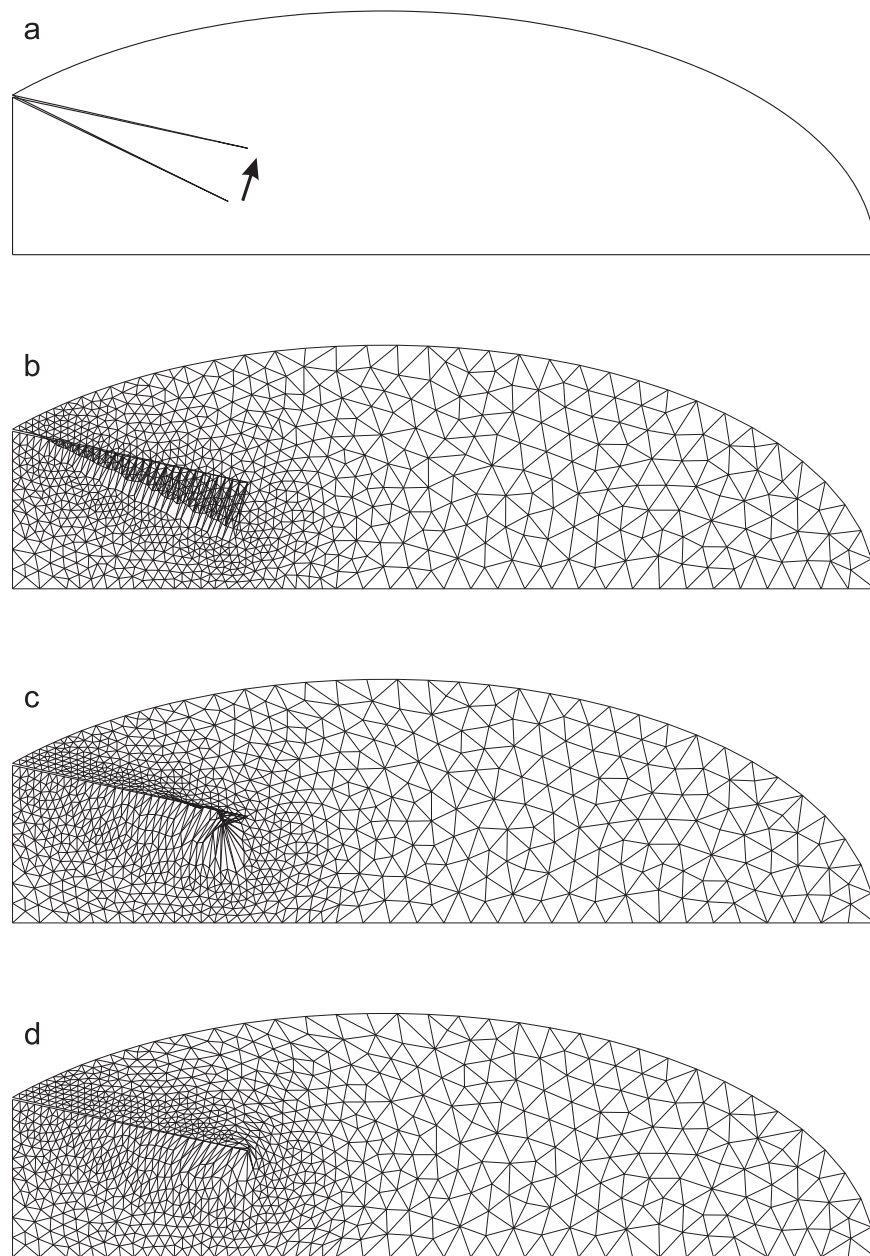
Wanneer er gerekend wordt in een geschaalde ruimte worden de posities van de knopen van de driehoeken (\underline{x}) eerst omgerekend naar de geschaalde ruimte (\underline{x}'). De krachten worden dan berekend met de omgerekende posities (\underline{x}'). De Jacobianen dienen ook omgerekend te worden.

$$\frac{\partial \underline{F}_a}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{F}_a}{\partial \underline{x}'} \frac{\partial \underline{x}'}{\partial \underline{x}}. \quad (7.12)$$

Hierbij worden de waarden voor $\frac{\partial \underline{F}_a}{\partial \underline{x}'}$ gegeven door de uitdrukkingen (7.12) waarbij de berekening wordt gedaan met de posities in de geschaalde ruimte (\underline{x}').

De methode wordt geïllustreerd in figuur 7.17. De geometrie is een axisymmetrische voorstelling van de linkerhartkamer waarin een klep wordt bewogen. Het rooster bevat 1003 knopen. De klep wordt gedraaid over een redelijk grote hoek (figuur 7.17a) zodat de initiële toestand van het roosterprobleem overlappende driehoeken bezit. Deze initiële toestand omvat 61 driehoeken met negatieve oppervlakten (figuur 7.17b).

Figuur 7.17c toont het rooster na 50 iteraties. Er zijn nog steeds 35 negatieve driehoeken. Na 150 iteraties zijn er geen negatieve driehoeken meer. De toestand van dit rooster wordt getoond in figuur (figuur 7.17d).



Figuur 7.17: a : verdraaiing van de klep, b : initieel rooster na verdraaiing van de klep met 61 negatieve driehoeken, c : rooster na 50 iteraties met nog 35 negatieve driehoeken, d : geldig rooster na 150 iteraties.

7.6.4b Gebruik van geneste iteraties

Om de methode die hierboven wordt beschreven te versnellen, kan gebruik gemaakt worden van grovere roosters en geneste iteraties.

Eerst wordt de verplaatsing van het rooster gezocht op het grofste rooster. Wanneer alle driehoeken een positieve oppervlakte hebben, wordt het probleem opgelost op het eerstvolgende fijner rooster. Als startwaarde voor de knopen op dit rooster worden dan de verplaatsingen gevonden op het grovere rooster geïnterpoleerd. De oplossingsmethode op elk niveau van roosters maakt gebruik van Jacobi iteraties na een Newton linearisatie (zie boven). Op elk niveau zijn er typisch minder dan een twintigtal iteraties nodig om tot positieve oppervlakten te komen. Wanneer alle driehoeken positief zijn worden nog enkele iteraties gedaan, want het is niet nodig om dit bewegend roosterprobleem zeer nauwkeurig op te lossen. De positie van de interne knopen is immers willekeurig van zodra het bekomen rooster geen negatieve driehoeken meer bezit en de kwaliteit van het rooster redelijk is.

Deze methode wordt geïllustreerd in figuur 7.18. Figuur 7.18a toont het detail van de initiële toestand in de omgeving van de klep. Twee grovere roosters worden gebruikt met respectievelijk 249 en 68 knopen (figuren 7.18b en 7.18c). Eerst wordt de iteratieprocedure gestart op het grofste rooster dat initieel 7 negatieve driehoeken bevat. Er zijn 3 iteraties nodig om geen negatieve driehoeken meer te hebben. De toestand wordt getoond na 20 iteraties in figuur 7.18d.

Deze toestand wordt dan getransfereerd naar het fijnere rooster en na interpolatie heeft de initiële toestand op dit rooster geen negatieve driehoeken (figuur 7.18e). Na 20 iteraties is de toestand voldoende glad (figuur 7.18f).

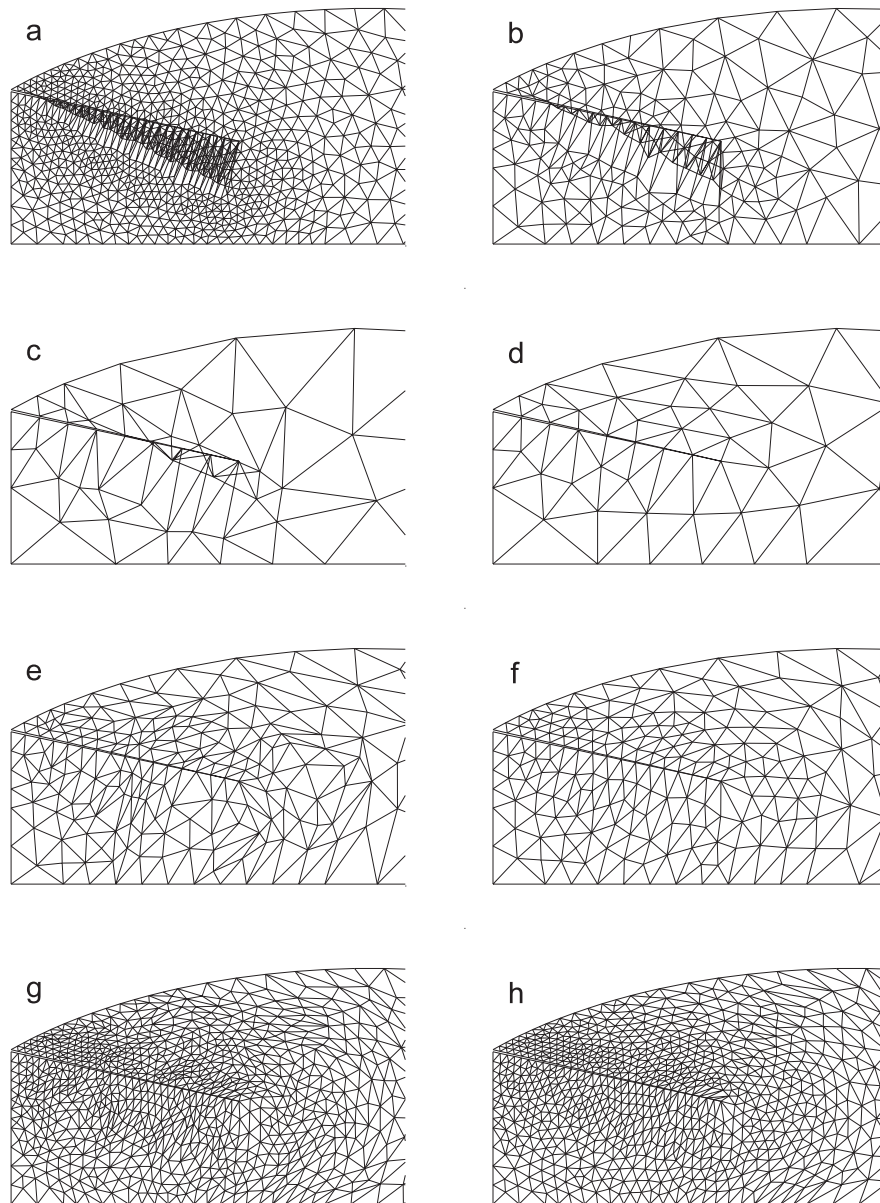
Deze procedure wordt herhaald voor het fijnste rooster. De initiële toestand wordt getoond in figuur 7.18g en de gegladde toestand in figuur 7.18h.

De effectieve kost voor de geneste iteratie omgerekend naar iteraties op het fijne rooster wordt gegeven door

$$20 \left(1 + \frac{249}{1003} + \frac{68}{1003} \right) \approx 26.$$

De winst in tijd voor dit rooster met 1003 knopen is dan $150/26 \approx 5$ à 6. Wanneer fijnere roosters gebruikt worden met meer knopen, zal deze winst nog toenemen.

Dit voorbeeld werd enkel gekozen om de performantie van de methode te tonen. Voor stromingsberekeningen zullen de verplaatsing van de wand voor elke tijdstap veel kleiner zijn, zodat de interne knopen ook veel minder dienen te bewegen.



Figuur 7.18: Berekening van de verplaatsing van de interne knopen met geneste iteraties. Zie tekst voor verdere uitleg.

7.6.5 Generatie van grovere roosters

Om de berekening voor de nieuwe posities van de knopen te versnellen wordt gebruik gemaakt van geneste iteraties. Deze methode maakt gebruik van grovere roosters. De generatie van deze roosters gebeurt volledig automatisch zoals hier beschreven wordt.

De grovere roosters hebben telescoperende knopen. Dit betekent dat alle knopen van een grof rooster ook optreden in al de fijnere roosters. De roosters worden gegenereerd van fijn naar grof. Om een grover rooster te genereren startend vanaf een fijn rooster wordt eerst een verzameling knopen geselecteerd uit het fijne rooster dat moet optreden in het grovere rooster en nadien wordt deze verzameling knopen geconnecteerd in een triangulatie.

Tijdens de selectie van de optredende knopen in het grovere rooster moet speciaal aandacht besteed worden aan de randknopen. Typisch worden de helft van de randknopen geselecteerd. Sommige knopen zijn echter cruciaal of de rand van de geometrie te beschrijven en mogen dus nooit verwijderd worden tijdens de vergroving.

In [50] wordt een vergrotingsalgoritme gegeven dat gebaseerd is op het idee dat alle burens van een geselecteerde knoop kunnen verwijderd worden in het grovere rooster. Veronderstel dat de knopen van het fijne rooster in een lijst van knopen zitten. In deze lijst zijn de eerste knopen diegene die niet mogen verwijderd worden, dan volgen de randknopen en nadien de interne knopen. Initieel zijn alle knopen geselecteerd. Door toepassing van het volgende algoritme wordt de verzameling knopen voor het grovere rooster geselecteerd.

Algoritme: Selectie van verzameling knopen om grof rooster te vormen

```
doe voor elke knoop van de lijst:
  als de knoop geselecteerd is
    deselekteer dan alle buurknopen van deze knoop
einde doe
```

Het algoritme reduceert het aantal knopen ruw geschat met een factor 2^d , waar d staat voor het aantal dimensies. Door toepassing van het algoritme, treedt tenminste één buurknoop van elke fijnroosterknoop op in het grovere rooster, tenzij de knoop zelf optreedt in het grovere rooster.

Na selectie wordt deze verzameling knopen geconnecteerd tot een triangulatie. Dit gebeurt door startend van het fijne rooster, de niet-geselecteerde één voor één te verwijderen uit het rooster. De polygonale caviteit die ontstaat na verwijdering van een knoop en al zijn connecterende zijden wordt gehertrianguleerd met een Delaunay-algoritme.

Doordat de knopen in het grovere rooster ook optreden in het fijne rooster wordt de overbrenging van gegevens tussen deze twee roosters enorm vereenvoudigd.

Hoofdstuk 8

Vloeistof-wand interactie

8.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de methode beschreven die gebruikt wordt om de drie deelproblemen beschreven in de vorige hoofdstukken te koppelen. Deze drie deelproblemen beschreven respectievelijk de vloeistofstroming, de beweging van de wand en de beweging van het rooster.

Eerst zal nog eens een kort overzicht gegeven worden hoe de verschillende deelproblemen werken. Hierbij wordt elk probleem op zich eerder voorgesteld als een zwarte doos, waarbij de aandacht uitgaat naar de invoer die verondersteld wordt gekend te zijn en naar de uitvoer, dus het resultaat van de berekening.

Verder wordt dan in detail uitgelegd hoe de verschillende deelproblemen afwisselend worden aangesproken en hoe ze met elkaar interageren. De gekozen strategie zorgt ervoor dat voor iedere tijdstap een stromingstoestand wordt berekend die overeenstemt met de instroomvoorwaarden en een beweging van de wand, waarbij de beweging van de wand zelf zodanig is dat er een evenwicht wordt bereikt van krachten die in de elastische wand optreden en drukkrachten die door de vloeistof op de wand worden uitgeoefend.

8.2 Overzicht van de verschillende deelproblemen

8.2.1 Stromingsprobleem

Het stromingsprobleem wordt beschreven door de Navier-Stokes-vergelijkingen in Lagrangiaanse-Euleriaanse vorm zodat de stroming kan berekend worden in een bewegende geometrie. De oplossing van deze vergelijkingen wordt gezocht met gebruik van een pseudo-compressibiliteitsmethode. Dit betekent dat gedurende de iteraties in pseudo-tijd o.a. de onbalans van de massavergelijking wordt opgevangen door de pseudo-compressibiliteit van de vloeistof. Dit uit zich in het verhogen van de druk in die cellen waar er meer bloed instroomt dan uitstroomt of het verlagen van de druk in het omgekeerde geval. Wanneer een oplossing wordt bereikt is dit effect volledig verdwenen, zodat wel degelijk wordt voldaan aan de incompressibiliteit van het bloed.

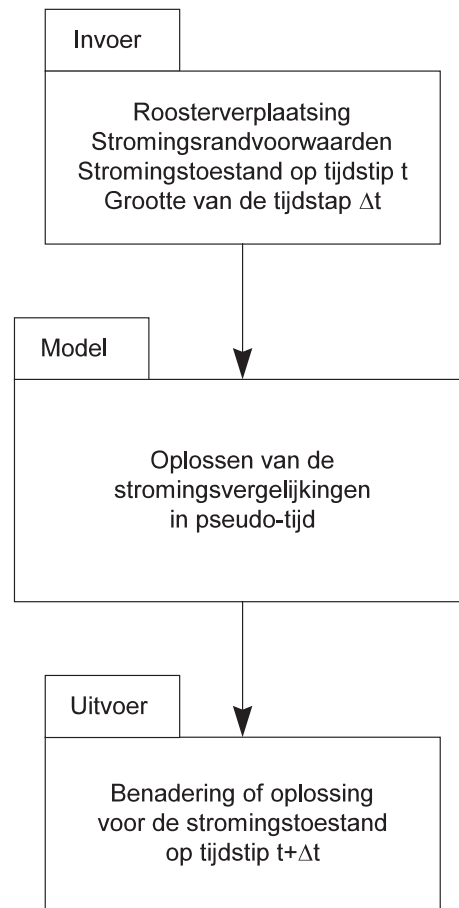
Om de verandering van de stromingstoestand te berekenen gedurende één pseudo-tijdstap wordt verondersteld dat de beweging van de wand gegeven is. Verder worden stromingsrandvoorwaarden opgelegd. Zo wordt bijvoorbeeld aan de mitraalklep de snelheid opgelegd waarmee het bloed de ventrikel binnenstroomt. Aangezien er axisymmetrisch wordt gerekend, wordt aan de as van de ventrikel een symmetrielandvoorwaarde opgelegd. Er wordt verder niet geëist dat de volumeverandering die gepaard gaat met de beweging van de wand overeenstemt met het volume bloed dat gedurende de tijdstap naar binnenstroomt. De netto instroming van bloed kan immers gedurende deze pseudo-tijdstap opgevangen worden door de pseudo-compressibiliteit. Hoe deze eigenschap verder kan gebruikt worden in het koppelingsmechanisme met de andere deelproblemen wordt verder uitgelegd.

Figuur 8.1 toont schematisch wat de invoer is die nodig is om een berekening te doen voor een pseudo-tijdstap en wat de bekomen resultaten zijn die uit deze berekening volgen. Deze kunnen gebruikt worden als invoer van één van de andere deelproblemen.

8.2.2 Verplaatsing van de hartspierwand

De positie van de hartspierwand wordt zodanig bepaald dat de actieve en passieve krachten die intern in de hartspierwand aanwezig zijn in evenwicht zijn met de drukkrachten die uitgeoefend worden door het bloed en met de traagheidskrachten in de hartspierwand.

De invoer die nodig is om de verplaatsing van de hartspierwand te bepalen is de druk die op de hartspierwand inwerkt. Er kan reeds rekening mee gehouden worden hoe de druk zou variëren indien de hartspierwand zich verplaatst. Hoe dit gebeurt

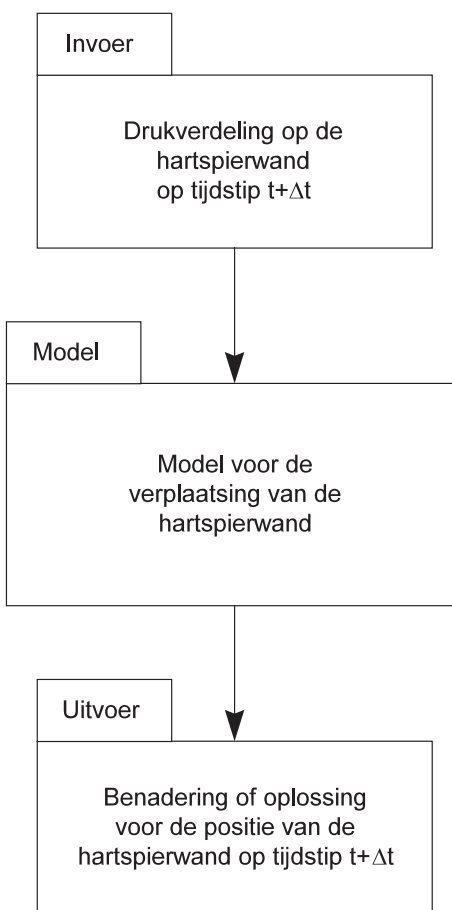


Figuur 8.1: In- en uitvoer voor de stromingsberekening.

wordt verder uitgelegd. De positie van de hartspierwand bepaalt zelf de passieve krachten die in de hartspierwand aanwezig zijn en het tijdstip van de berekening wordt gebruikt om de actieve krachten te bepalen. Deze krachten zijn dus intrinsiek aan het model van de hartspierwand.

De oplossing van het probleem wordt iteratief gezocht. Elke iteratie brengt de positie van de hartspierwand dichterbij de uiteindelijke oplossing. Omdat echter ook de toestanden van de andere deelproblemen veranderen en dus ook de invoer van dit probleem wijzigt als de positie van de wand beweegt, is het meestal nuttig om het resultaat van een eerste berekening al te gebruiken in de combinatie met de andere deelproblemen.

Figuur 8.2 toont schematisch wat de invoer is die nodig is om een berekening te doen voor de bepaling van de verplaatsing van de hartspierwand en toont dat het bekomen resultaat uiteraard een schatting is voor de nieuwe positie van de hartspierwand.



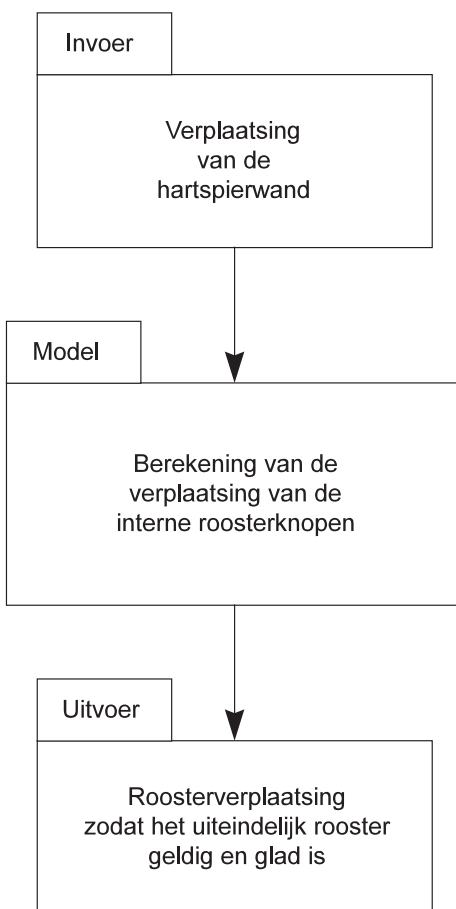
Figuur 8.2: In- en uitvoer voor de verplaatsing van de hartspierwand.

8.2.3 Verplaatsing van het rooster

Dit deelprobleem zorgt ervoor dat de interne knopen van het rooster verplaatst worden wanneer de verplaatsing van de randknopen opgegeven is. De verplaatsing van de interne knopen dient zodanig te gebeuren dat het uiteindelijke rooster geldig is. Dit betekent dat er geen overlappende driehoeken mogen bestaan. Door de interne knopen te verplaatsen kan ervoor gezorgd worden dat het rooster er steeds regelmatig uitziet. Het is immers zo dat de discretisatiefout op regelmatige roosters in het algemeen kleiner is dan op onregelmatige roosters. Onregelmatige roosters kunnen gezien worden als roosters waar de vorm van de driehoeken van plaats tot plaats bruusk veranderen.

Figuur 8.3 toont schematisch dat de invoer de opgelegde verplaatsing van de rand is en dat de berekening als resultaat de nieuwe positie van de interne knopen oplevert. Dit gebeurt door per knoop een krachtenevenwicht uit te drukken waarbij de krachten zodanig gekozen zijn dat de hoekpunten van omgeklapte driehoeken zodanig bewegen dat de driehoek opnieuw een positieve oppervlakte krijgt. Anderzijds wordt ervoor

gezorgd dat het bekomen rooster met allemaal positieve driehoeken er regelmatig uitziet.



Figuur 8.3: In- en uitvoer voor de verplaatsing van de interne roosterknopen.

8.3 Evolutie in de tijd

Om de evolutie in de tijd te beschrijven wordt er van uit gegaan dat de toestand op tijdstip t gekend is. Er wordt dan gezocht naar de toestand op tijdstip $t + \Delta t$ die oplossing is van de verschillende deelproblemen.

Verder kunnen de omschrijving van de verschillende deelproblemen zelf functie zijn van de tijd. Zo kan de compliantie van de hartspierwand veranderen in functie van de tijd tijdens de relaxatie van de ventrikel. Ook kan de randvoorwaarde van het stromingsprobleem tijdsafhankelijk zijn. Zo wordt als instroomrandvoorwaarde voor de ventrikel een snelheidsprofiel opgelegd ter hoogte van de mitraalklep. Dit wordt verder uitgelegd in hoofdstuk 9.

De verschillende stappen die in het iteratieproces achtereenvolgens worden uitgevoerd, zijn :

1. Genereer het rooster dat overeenstemt met de ventrikel in evenwichtstoestand (nul transmurale druk) en stockeer de referentiewaarden r_{0i} en $l_{0i+1/2}$ om nadien de rekken te kunnen berekenen (zie §6.3.1a).
2. Gegeven de geometrie, het rooster en de toestand op dit rooster, pas het rooster aan, indien nodig, door omwisseling van zijden en toevoegen of verwijderen van knopen, zodat het rooster voldoet aan de lokaal gestelde eisen qua regelmatigheid (Delaunay in geschaalde ruimte) en punt dichtheid. Deze stap wordt uitvoerig behandeld in hoofdstuk 7.
3. Bereken en stockeer de grootheden op het oude tijdsniveau die nodig zijn voor de tijdsintegratie.
4. Verander de tijd t naar het nieuwe tijdsniveau $t + \Delta t$.
5. Bereken de gekoppelde oplossing van de verschillende deelproblemen. Deze stap wordt verder uitvoerig beschreven.
6. Herhaal voorgaande procedure vanaf stap 2.

Stap 5 behandelt de koppeling tussen de verschillende deelproblemen en wordt hierna behandeld.

8.3.1 Gekoppelde oplossing van de deelproblemen

Om de oplossing te zoeken van het stromingsprobleem binnen één tijdstap wordt gebruik gemaakt van iteraties in pseudo-tijd. Dit wordt uitvoerig uitgelegd in hoofdstuk 5. Met deze methode gedraagt de vloeistof zich als het ware compressibel in pseudo-tijd. Echter na convergentie binnen één fysische tijdstap is van deze pseudo-compressibiliteit niets meer te merken.

Wanneer een oplossing gezocht wordt die voldoet aan alle deelproblemen kan men elk deelprobleem één voor één oplossen. Men kan bijvoorbeeld eerst het stromingsprobleem oplossen, met de bekomen drukken de positie van de hartspierwand bepalen en nadien de posities van de interne roosterknopen berekenen. Doordat echter de positie van de wand nog verplaatst, moet het stromingsprobleem opnieuw opgelost worden, enzovoort. Niets garandeert echter dat deze methode uiteindelijk convergeert.

Daarom wordt voor een andere aanpak gekozen. Aangezien elk deelprobleem op zich iteratief wordt opgelost, kan reeds met de resultaten van één enkele iteratiestap een ander deelprobleem aangepakt worden. De interactie is dan veel sterker.

Het gebruik van de pseudo-compressibiliteitsmethode leidt ook tot een onmiddellijk voordeel in deze koppelingsmethode. Zo zal bijvoorbeeld na een iteratiestap in het stromingsprobleem de druk in een cel verhoogd zijn als er meer massa instroomt dan uitstroomt. Deze drukverhoging kan dan leiden tot een verplaatsing van de hartspierwand zodat het volume vergroot. Deze volumevergroting zorgt er dan voor in de volgende iteratiestap in het stromingsprobleem dat de onbalans voor de massavergelijking in voorgenoemde cel voor een deel wordt opgevangen door het vergroten van het celvolume. De druk wordt dus eigenlijk door het stromingsprobleem gebruikt als sturing voor het probleem dat de positie van de hartspierwand bepaalt. Het is hierbij ook aan te raden om de iteratiestap voor het wandprobleem met een lokale methode te doen in plaats van met een globale methode (zie §6.3.2), aangezien door de koppeling van de verschillende deelproblemen de golfvoortplanting gebeurt met een eindige snelheid (zie §8.4). Wanneer nu echter door de drukverhoging de positie van de wand toch te sterk wijzigt, kan de methode nog altijd divergeren.

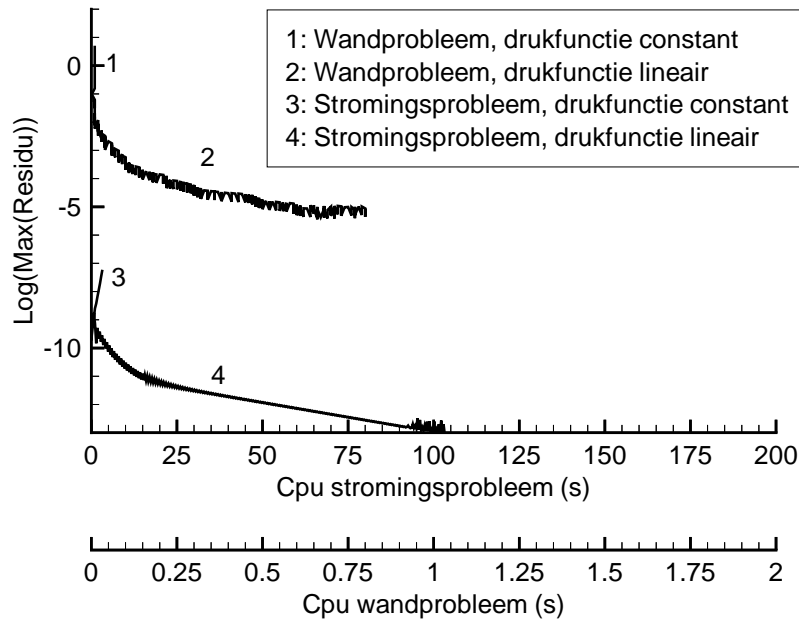
Om dit op te vangen is het soms nodig om tijdens de bepaling van de positie van de wand al te weten hoe de drukverdeling zal veranderen met deze nieuwe positie. Deze invloed op de drukverdeling komt doordat de nieuwe positie van de wand niet meer overeenstemt met de oude oplossing van het stromingsprobleem. Het kan dus nodig zijn met deze invloed al rekening te houden tijdens de bepaling van de positie van de wand. Het komt er eigenlijk op neer dat een soort afgeleide van de druk naar de positie van de wand gekend is bij het bepalen van de positie van de wand. Hierdoor is de koppeling veel sterker dan wanneer er enkel een opeenvolging van iteraties is bij de verschillende deelproblemen.

De verschillende stappen die nodig zijn om de verschillende deelproblemen gekoppeld op te lossen zijn dan de volgende :

1. Maak een schatting van de drukdaling ten gevolge van het relaxeren van de hartspier tussen tijdstip t en $t + \Delta t$. Dit gebeurt aan de hand van de verandering van de gemiddelde elasticiteitsmodulus in dat tijdsinterval. Deze drukdaling wordt globaal opgelegd aan het stromingsprobleem.
2. Bepaal een drukverdelingsfunctie op de hartspierwand, waarin al dan niet rekening wordt gehouden met de invloed van het stromingsprobleem bij het verplaatsen van de wand.
3. Bereken benaderd de verplaatsing van de hartspierwand overeenkomstig deze drukverdelingsfunctie.

4. Bepaal de positie van de interne knopen van het rooster gegeven de nieuwe positie van de hartspierwand.
5. Bereken benaderd de toestand van het stromingsprobleem met de nieuwe positie van de hartspierwand en de nieuwe positie van de interne knopen.
6. Herhaal vanaf stap 2 tot convergentie is bereikt.

Indien de drukverdelingsfunctie geen rekening houdt met een mogelijke verplaatsing van de wand, wordt de drukverdelingsfunctie gegeven door de drukken uit het stromingsprobleem (constante drukverdelingsfunctie). De drukverdelingsfunctie die wel rekening houdt met een mogelijke verplaatsing van de wand (lineaire drukverdelingsfunctie) wordt in volgende paragraaf uitgelegd.



Figuur 8.4: Representatief convergentieverloop van 2D berekening gedurende 1 tijd-stap. L_∞ -norm van het residu in functie van de berekeningstijd. Convergentieverloop voor stromingsprobleem en wandprobleem afzonderlijk, voor zowel constante als lineaire drukfunctie.

Een representatief convergentieverloop voor zowel de constante als de lineaire drukverdelingsfunctie wordt getoond in figuur 8.4. Voor dit geval blijkt de constante drukverdelingsfunctie niet te werken, terwijl met de lineaire drukverdelingsfunctie goede convergentie wordt bereikt. Voor de stromingsberekeningen van de vulling van de linkerhartkamer convergeren beide methodes echter wel. Daar wordt de methode met de constante drukverdelingsfunctie geprefereerd omdat deze dan iets sneller is.

8.3.2 Bepalen van de lineaire drukverdelingsfunctie op de wand

De term lineaire drukverdelingsfunctie wordt gebruikt indien rekening wordt gehouden met de invloed van het stromingsprobleem bij het verplaatsen van de wand. Om deze drukverdelingsfunctie op de wand te bepalen wordt eerst de verplaatsing van de wand berekend die zou overeenstemmen met een drukverdeling die onafhankelijk is van de positie van de wand. Deze wandverplaatsing wordt al dan niet ondergerelaxeerd opgelegd aan het stromingsprobleem. Door een iteratie van het stromingsprobleem verandert de drukverdeling langsheen de wand. Van deze verandering wordt dan gebruik gemaakt om de drukverdelingsfunctie te bepalen.

Volgende stappen zijn nodig om de drukfunctie te bepalen.

1. Bewaar de positie van de hartspierwand (\underline{x}_i^0) en de druk afkomstig uit het stromingsprobleem (p_i^0).
2. Bereken met de druk uit het stromingsprobleem de verplaatsing van de hartspierwand. Eén enkele iteratie kan al een aanwijzing geven in welke richting de wand zal bewegen. Deze berekende verplaatsing kan al dan niet ondergerelaxeerd worden. De uiteindelijke verplaatsing wordt gegeven door $\Delta \underline{x}_i^0$.
3. Bepaal de positie van de interne knopen overeenkomstig de verplaatsing berekend in stap 2.
4. Bereken benaderd (eventueel één enkele iteratie) de toestand van het stromingsprobleem dat overeenstemt met de nieuwe positie van de rand. Dit leidt tot nieuwe drukwaarden op de rand p_i^1 . Hiermee kan de drukverdelingsfunctie berekend worden (zie verder).
5. Herstel de positie van de hartspierwand naar de bewaarde toestand (\underline{x}_i^0).

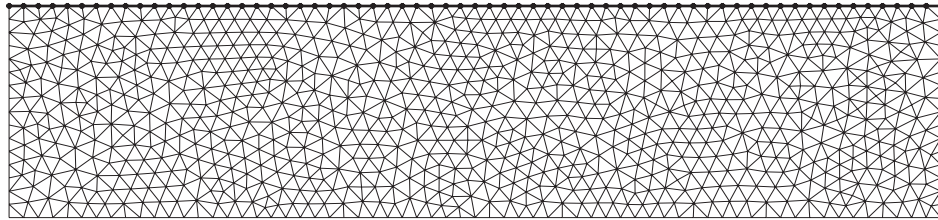
De drukfunctie zelf wordt dan gegeven door

$$p_i(\underline{x}_i) = p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0) \frac{\Delta \underline{x}_i^0}{|\Delta \underline{x}_i^0|^2} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_i^0). \quad (8.1)$$

Dit betekent eigenlijk dat indien de uiteindelijke verplaatsing \underline{x}_i in dezelfde richting is als de initiële verplaatsing (perturbatie) \underline{x}_i^0 er rekening gehouden wordt met de invloed van de druk afkomstig uit het stromingsprobleem. Indien de uiteindelijke verplaatsing loodrecht is op de initiële verplaatsing blijft de druk constant. Om de afgeleide ook in deze richting te kennen, zou ook een perturbatie in deze richting moeten doorgevoerd worden. Dit blijkt voor de uitgevoerde berekeningen niet nodig te zijn.

8.4 Golfvoortplanting in een cilindrische buis met elastische wand

Om de koppeling te valideren wordt de golfvoortplanting berekend in een cilindrische buis met elastische wand. De afmetingen van de buis zijn geïnspireerd op de afmetingen van de linkerventrikel. Er wordt gerekend met een lengte l en straal r van de buis van respectievelijk 5 cm en 12 mm. De wandeigenschappen worden bepaald door de parameter Eh (zie hoofdstuk 6) met E de elasticiteitsmodulus en h de wanddikte van de buis. Voor deze validatie wordt Eh gekozen gelijk genomen aan 19.8 Pa m, gebaseerd op de materiaaleigenschappen van de hartspierwand (zie §6.4).



Figuur 8.5: Discretisatie van de cilindrische buis met elastische wand.

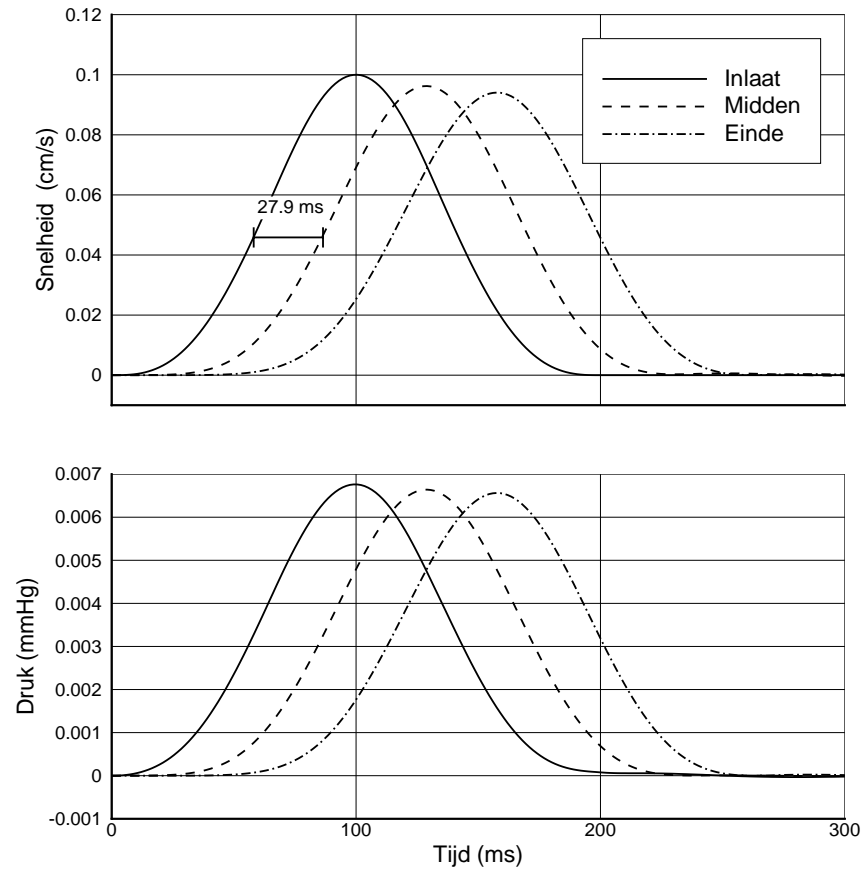
Het rooster gebruikt voor deze berekening wordt getoond in figuur 8.5 en bevat 893 knopen, vergelijkbaar met het rooster dat gebruikt wordt voor de discretisatie van de linkerventrikel (zie figuur 6.3). De tijdstap komt ook overeen met de tijdstap gebruikt bij de stromingsberekening voor de vulling van de linkerventrikel en bedraagt 1.5 ms. De berekening wordt uitgevoerd zonder rekening te houden met de viscositeit.

De eindige golfvoortplantingssnelheid die ontstaat bij de stroming van een incompressibel niet-viskeus fluïdum in een cilindrische buis met elastische wand, wordt analytisch gegeven door de Moens-Korteweg-vergelijking :

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}, \quad (8.2)$$

waarbij c de golfvoortplantingssnelheid is en ρ de soortelijke massa van het medium in de buis. Er wordt gerekend met de soortelijke massa van bloed $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$. Deze Moens-Korteweg-vergelijking is enkel geldig indien de stroming als ééndimensionaal kan beschouwd worden. De Moens-Korteweg-golfvoortplantingssnelheid berekend met vorige gegevens bedraagt 0.886 m/s.

Aan de inlaat wordt een snelheidsprofiel opgelegd met kleine amplitude. Dit wordt getoond in figuur 8.6. Het inlaatprofiel wordt gegeven door een vijfde-graadsvergelijking, waarvan de eerste en tweede afgeleiden op de tijdstippen 0 en 200 ms gelijk



Figuur 8.6: Berekeningsresultaten van 2D axisymmetrische berekening in een cilindrische buis met elastische wand, zonder reflectie aan einde. Snelheidsprofielen (boven) en drukprofielen (onder) aan inlaat, midden en einde van de buis. Aanduiding van tijdsverschil tussen golf aan inlaat en midden.

aan nul zijn. De periode waarover het inlaatprofiel verschillend is van nul bedraagt immers 200 ms. Deze waarde werd geïnspireerd op de duur van de vroege vullingsgolf (zie hoofdstuk 9). Op het einde van de buis wordt een niet-reflecterende randvoorwaarde opgelegd, zodat geen samengestelde golven kunnen ontstaan afkomstig van reflecties. De golfvoortplantingssnelheid kan dan bijvoorbeeld berekend worden uit de tijdsverschuiving van het inlaatprofiel tussen de inlaat en het midden van de buis (zie figuur). Dit tijdsverschil bedraagt 27.9 ms. De afgelegde afstand is de helft van de buis, zodat de berekende golfvoortplantingssnelheid 0.896 m/s bedraagt. Dit is een verschil van 1 % vergeleken met de analytische waarde.

Uit de eigenvectoren berekend in appendix C, kent men de karakteristieke grootheden die getransporteerd worden met de golf. Doordat er geen reflectie is, zien we hier enkel een naar rechts lopende golf met karakteristieke grootheid $\partial p + \rho c \partial u$. De karakteristieke grootheid $\partial p - \rho c \partial u$ die getransporteerd wordt met een naar links

lopende golf moet dus nul zijn. De druk- en snelheidsgolf lopen bijgevolg in fase en hun amplitudeverhouding bedraagt $\rho c = 930 \text{ Pa s/m}$. De amplitudeverhouding bekomen uit de berekening met het model bedraagt 901 Pa s/m . Dit is een afwijking van 3 %.

Dit voorbeeld toont aan dat de verschillende deelproblemen goed op elkaar zijn afgestemd en dat de koppelingsstrategie goed werkt.

8.5 Besluit

In dit hoofdstuk wordt de koppelingsstrategie beschreven. Deze laat toe om iedere tijdstap een gekoppelde oplossing te vinden voor het stromingsprobleem, het probleem dat de positie van de hartspierwand bepaalt en het probleem dat de interne roosterknopen beweegt overeenkomstig een opgelegde randverplaatsing.

Als voorbeeld wordt de golfvoortplanting berekend in een buis met elastische wand, gevuld met bloed. De afmetingen en materiaaleigenschappen van de buis worden gekozen overeenkomstig met deze van de linkerventrikel. De berekende golfvoortplantingssnelheid komt zeer goed overeen met de analytisch gekende waarde uit de Moens-Korteweg-vergelijking.

Hieruit blijkt dat door het gekoppeld oplossen van de verschillende deelproblemen het fysisch waarneembaar verschijnsel van een eindige golfvoortplantingssnelheid goed wordt berekend, hoewel deze golfvoortplantingssnelheid in geen enkel deelprobleem expliciet wordt gebruikt. Het stromingsprobleem beschrijft immers een incompressibele stroming waarbij de akoestische golven zich oneindig snel voortplanten. Het is deze methode die verder zal gebruikt worden bij de berekening van de vulling van het linkerhart.

Hoofdstuk 9

Simulatie van de vulling van de linkerhartkamer

9.1 Inleiding

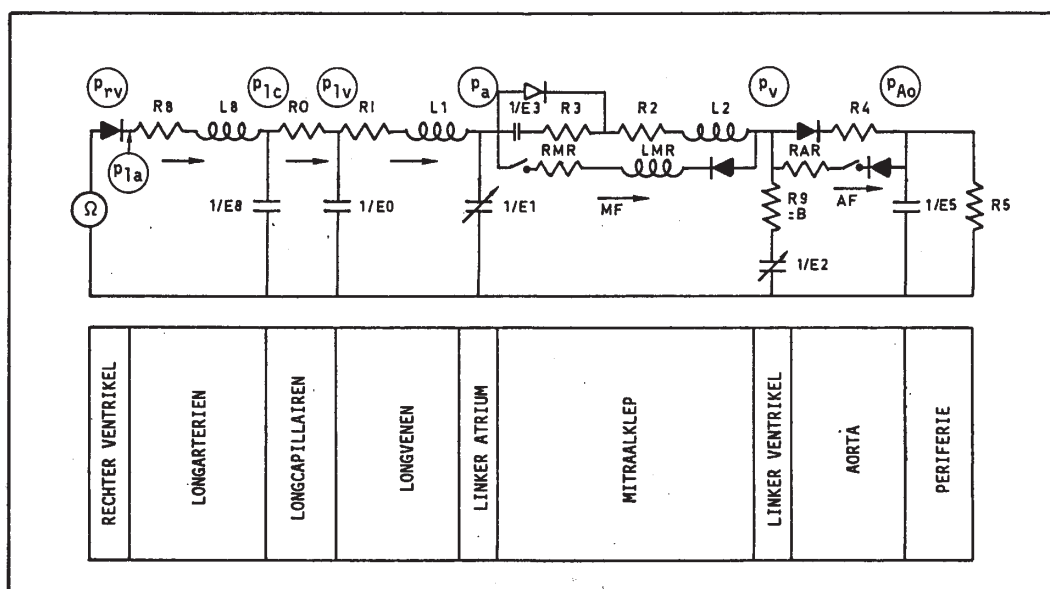
In dit hoofdstuk wordt het numeriek model aangewend om de vulling van de linkerhartkamer te simuleren. Eerst wordt een referentieberekening getoond. Vertrekkend van deze referentieberekening wordt dan een parameterstudie uitgevoerd. In deze parameterstudie worden invloeden van enkele fysiologische parameters bestudeerd aan de hand van intraventriculaire drukgradiënten enerzijds en aan de hand van kleuren Doppler M-mode beelden anderzijds. Een discussie wordt gegeven aan het einde van dit hoofdstuk.

9.2 Referentieberekening

9.2.1 Opzetten van de referentieberekening

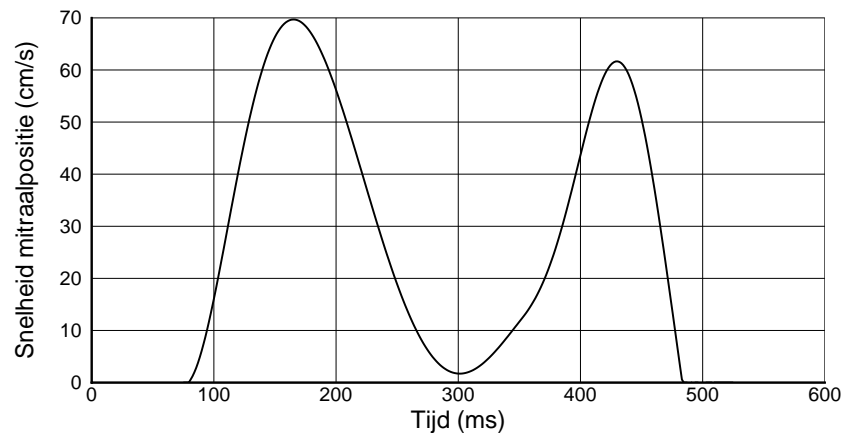
Voor de berekening is het nodig dat het diastolische druk-volumeverband van de linkerhartkamer gekend is. Dit verband karakteriseert de mechanische eigenschappen van de hartspierwand in de passieve toestand. Het beginpunt van de berekening komt overeen met het einde van de systole bij het sluiten van de aortaklep. De eindsystolische druk en volume dienen dus gekend te zijn. Vanaf dit punt start de isovolumetrische relaxatie die gekarakteriseerd wordt door de relaxatietijdsconstante τ . Van zodra de ventriculaire druk daalt onder de atriale druk opent de mitraalklep onmiddellijk en volledig. Vanaf dit ogenblik wordt als instroomrandvoorwaarde het snelheidspatroon ter hoogte van de mitraalklep (basis) opgelegd.

De parameters die nodig zijn om de berekening te starten, kunnen onafhankelijk van elkaar gekozen worden. Dit heeft echter fysiologisch gezien niet veel betekenis aangezien er een beïnvloeding bestaat tussen deze parameters. Om de parameters op elkaar af te stemmen wordt het 'lumped'-parametermodel van Meisner [78] gebruikt. Dit model simuleert de volledige hartcyclus. Het model is een elektrisch analogon van de volledige bloedsomloop (figuur 9.1) waarbij de stroming gemodelleerd wordt door een aaneenschakeling van schakelaars, diodes, weerstanden, capaciteiten en inerties. De vereiste waarden voor de vele parameters zijn afgeleid uit metingen op honden. Het is dan ook om deze reden dat een hondenhart wordt gekozen voor de berekening. Het computermodel is beschikbaar binnen IBITECH (Instituut Biomedische Technologie, Universiteit Gent) [137].



Figuur 9.1: Elektrisch analogon voor de bloedsomloop volgens Meisner [78].

De parameterbepaling voor de constitutieve wetten voor de karakterisatie van de hartspierwand wordt beschreven in §6.4. Voor deze parameterbepaling werd uitgegaan van het diastolische druk-volumeverband van een hondenhart beschreven in [82] (zie §6.4). Hetzelfde diastolische druk-volumeverband wordt als invoer gebruikt voor het model van Meisner. Als eindsystolisch volume wordt een fysiologische waarde van 18 ml gekozen [113]. Het stromingspatroon ter hoogte van de mitraalklep wordt berekend met het model van Meisner voor een hartslag van 80 slagen per minuut en voor een tijdsconstante van de isovolumetrische relaxatie van 30 ms. Het berekende snelheidspatroon wordt getoond in figuur 9.2. De berekende eindsystolische druk is 75 mmHg en de atriale druk bij opening van de mitraalklep bedraagt 6.75 mmHg. Deze waarden worden gebruikt als invoer voor het tweedimensionaal model.



Figuur 9.2: Snelheidspatroon ter hoogte van de mitraalklep, berekend met het model van Meisner en gebruikt als randvoorwaarde voor de stromingsberekening tijdens de vulling van het linkerhart.

Samengevat worden de fysiologische parameters gegeven in tabel 9.1.

soortelijke massa bloed	1050 kg/m ³
eindsystolisch volume	18 ml
eindsystolische druk	75 mmHg
tijdsconstante relaxatie	30 ms
mitraalklep opent bij	6.75 mmHg
hartritme	80 slagen per minuut

Tabel 9.1: Overzicht van de parameters voor de referentieberekening.

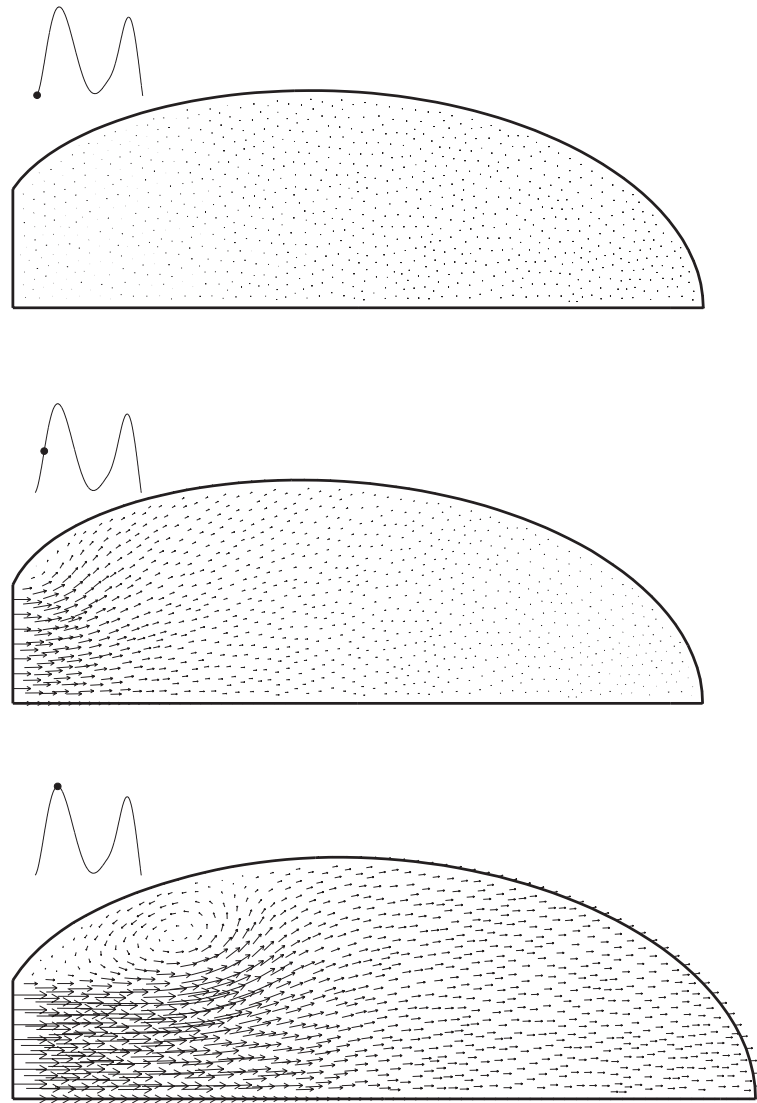
De berekening van de vulling gebeurt met de keuze van de geometrie beschreven in hoofdstuk 6. Er wordt aangenomen dat tijdens de vulling er door de klep weinig of geen krachten uitgeoefend op de stroming. Daarom wordt de klep niet meegemodelleerd. Ook de inertie van de hartspierwand wordt verwaarloosd. Zoals hierboven reeds beschreven, wordt de berekening gestart bij het begin van de diastole (eind van de systole, sluiten van de aortaklep). De eerste fase van de berekening omvat de isovolumetrische relaxatie. Er wordt benaderend verondersteld dat initieel het bloed in rust is en dat de ventrikel homogeen relaxeert. Er kan dan geen beweging van het bloed ontstaan tijdens de relaxatiefase en er zijn dan ook geen intraventriculaire drukgradiënten gedurende deze fase. In vivo kunnen wel intraventriculaire drukgradiënten optreden gedurende deze fase [89], doch deze zijn klein in vergelijking met optredende drukgradiënten gedurende diastole of systole (figuur 3.6). Van zodra de ventriculaire druk gedaald is onder de atriale druk opent de mitraalklep en wordt het snelheids-

patroon bekomen met het model van Meisner als instroomrandvoorwaarde toegepast. De berekening stopt voor de aanvang van de ventriculaire contractie.

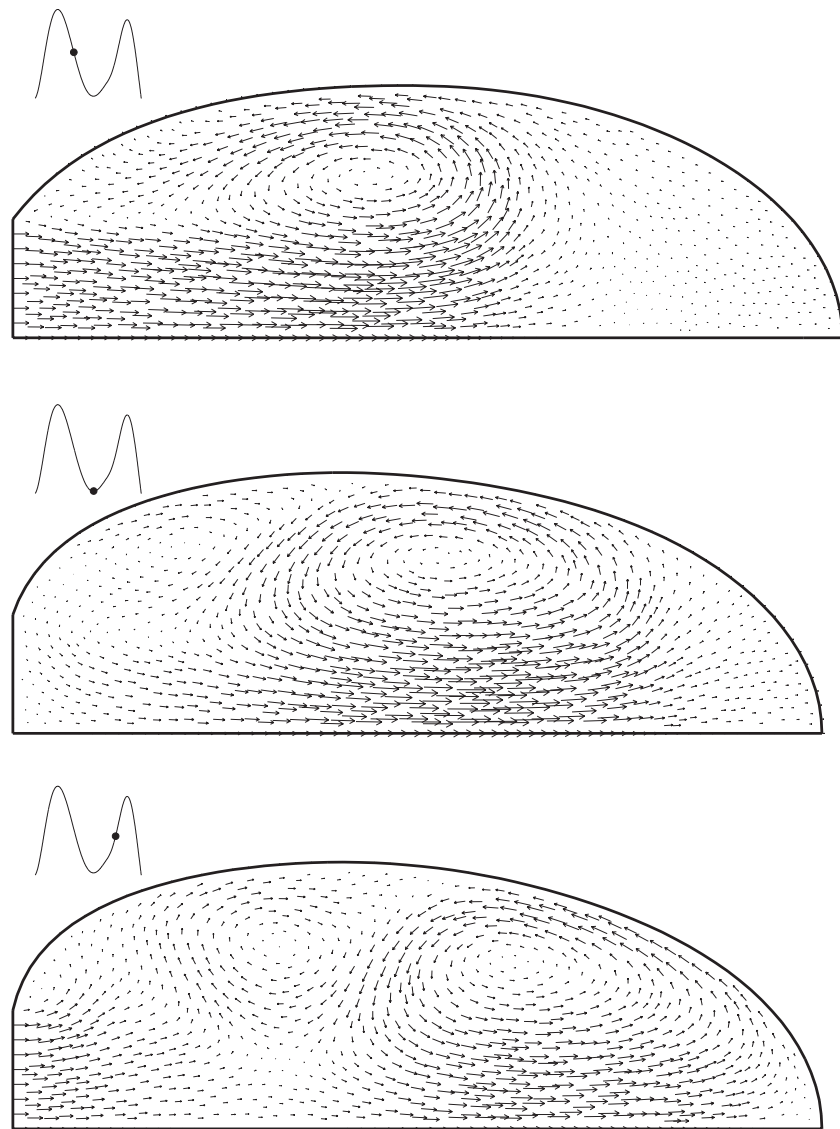
9.2.2 2D snelheidspatronen tijdens de vulling

Figuren 9.3, 9.4 en 9.5 tonen de snelheidsvectoren die optreden gedurende de vullingsfase. De tijdstippen worden getoond aan de hand van het opgelegde snelheidspatroon. De vulling wordt gekarakteriseerd door verschillende wervelbewegingen. Een eerste wervel ontstaat reeds voor het bereiken van het maximum van de vroege vullingsgolf. Deze wervel wordt tijdens de deceleratiefase van de snelle vullingsgolf versterkt en verplaatst zich richting apex. Tijdens de diastase is één grote wervel waarneembaar die zich bijna in de totale ventrikel uitstrekt. Aan de basis is ook een tweede kleine wervel waarneembaar met een draaizin die tegengesteld is aan deze van de eerste wervel. Tijdens de acceleratiefase van de atriale vullingsgolf groeit deze tweede wervel maar ontstaat er een derde wervel analoog aan de eerste. Tijdens de deceleratiefase is de tweede wervel bijna niet meer waarneembaar. De oorspronkelijke wervel bevindt zich ter hoogte van de apex en de derde wervel die ontstaat tijdens de atriale vullingsgolf vult nu de basis van de ventrikel.

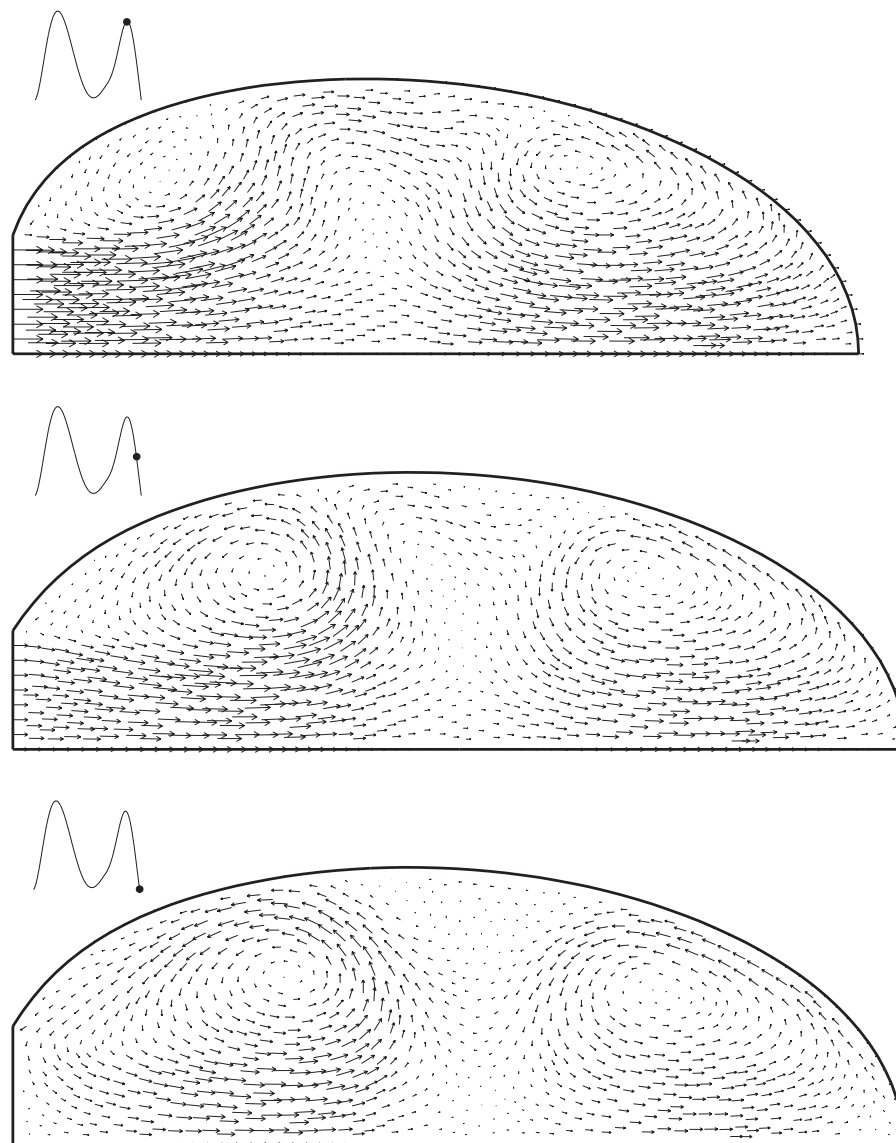
Het optreden van de wervels gedurende de vulling is een gekend verschijnsel [3, 65]. Er werd waargenomen dat tijdens de deceleratiefase een wervel ontstaat die de mitraalklep helpt sluiten. Dit wordt ook in figuur 9.5 gezien bij het einde van de atriale vullingsgolf. Het optreden van de wervelbeweging tijdens de acceleratiefase (zie figuur 9.3) is een verschijnsel dat nog verder onderzocht dient te worden. Hiervoor is een snellere captatie van 2D Doppler beelden noodzakelijk. Op dit ogenblik worden slechts 10 tot 20 beelden per seconde gecapteerd.



Figuur 9.3: Snelheidsvectoren in de linkerhartkamer tijdens de vullingsfase. Boven :
openen van de mitraalklep. Midden : acceleratie van de vroege vullingsgolf. Onder :
maximum van de vroege vullingsgolf.



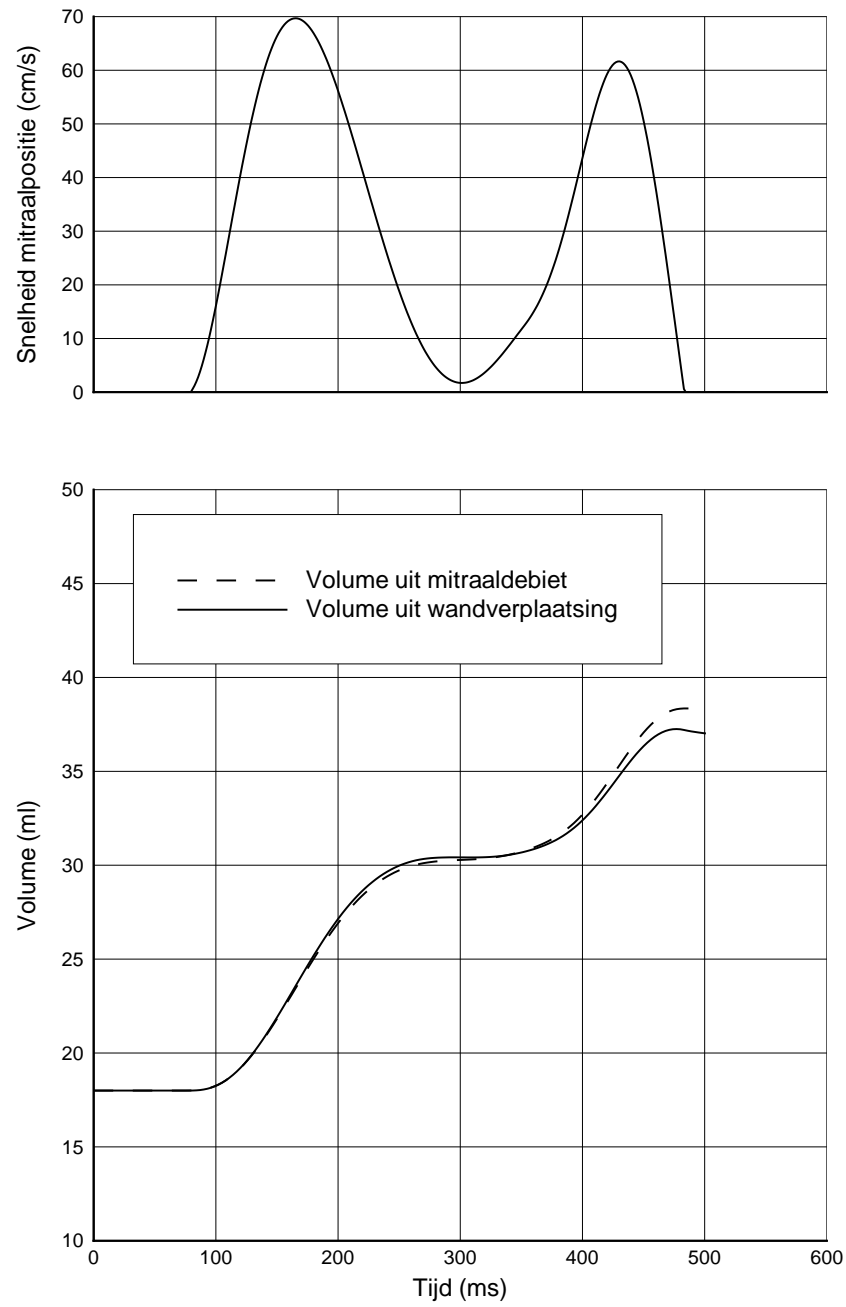
Figuur 9.4: Snelheidsvectoren in de linkerhartkamer tijdens de vullingsfase. Boven : deceleratie van de vroege vullingsgolf. Midden : diastase. Onder : acceleratie van de atriale vullingsgolf.



Figuur 9.5: Snelheidsvectoren in de linkerhartkamer tijdens de vullingsfase. Boven : maximum van de atriale vullingsgolf. Midden : deceleratie van de atriale vullingsgolf. Onder : sluiten van de mitraalklep.

9.2.3 Controle van massabehoud

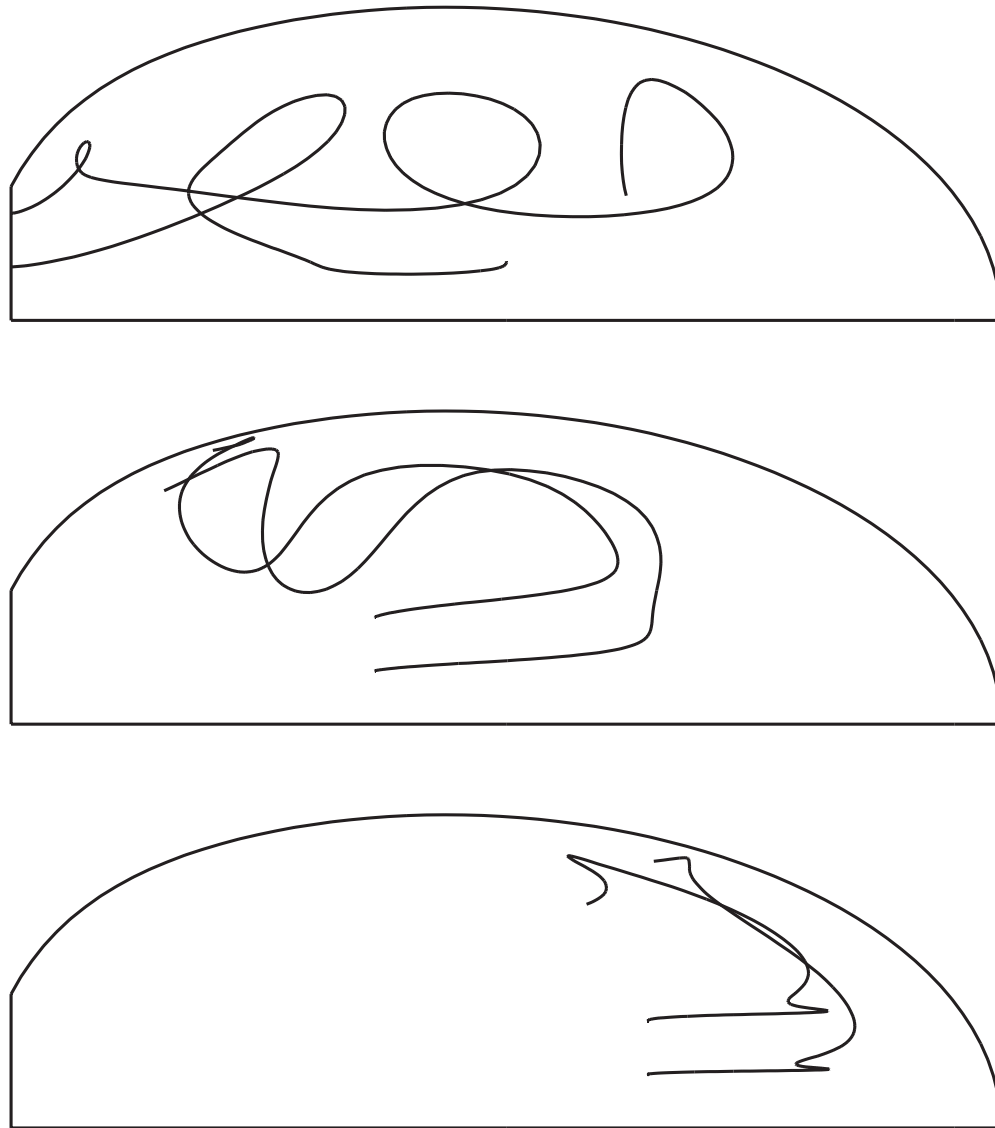
Figuur 9.6 toont het volume van de linkerhartkamer in functie van de tijd enerzijds bekomen door integratie van de positie van de hartspierwand en anderzijds door het integreren in de tijd van het opgelegde snelheidspatroon ter hoogte van de mitraalklep. Er wordt een goede overeenkomst bekomen. De gemiddelde afwijking gedurende de vulling bedraagt minder dan 3 %. Op het einde van de berekening wordt echter een sterkere afwijking gezien waarschijnlijk te wijten aan de steile dalende flank van het snelheidspatroon tijdens de deceleratie van de atriale vullingsgolf.



Figuur 9.6: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Onder: Vergelijking tussen twee verschillende volumeberekeningen : uit het mitraaldebiet en uit de wandverplaatsing.

9.2.4 Partikelbeweging

Figuur 9.7 toont de berekende trajectories van bloedpartikels vanaf het ogenblik van opening van de mitraalklep. Deeltjes die zich aan de basis bevinden verplaatsen zich ondanks de optredende wervels in de richting van de apex. Deeltjes die zich in het midden tussen basis en apex bevinden eindigen in de basale zone en dit dankzij de wervels. Deeltjes die zich in de apex bevinden op het moment van de klepopening verplaatsen hebben ook een nettoverplaatsing van de apex weg. De aortaklep bevindt zich naast de mitraalklep. Opdat er gedurende de hartwerking geen bloed zou zijn dat continu in de hartkamer verblijft, blijkt de wervelvorming daar een effectieve rol in te spelen.



Figuur 9.7: Partikelbeweging tijdens de vulling, vanaf opening tot sluiting van de mitraalklep. Partikels losgelaten op mitraalpositie (boven), op 2 cm (midden) en op 3.5 cm (onder) van mitraalpositie, telkens op 3 mm en 6 mm van symmetrieliijn.

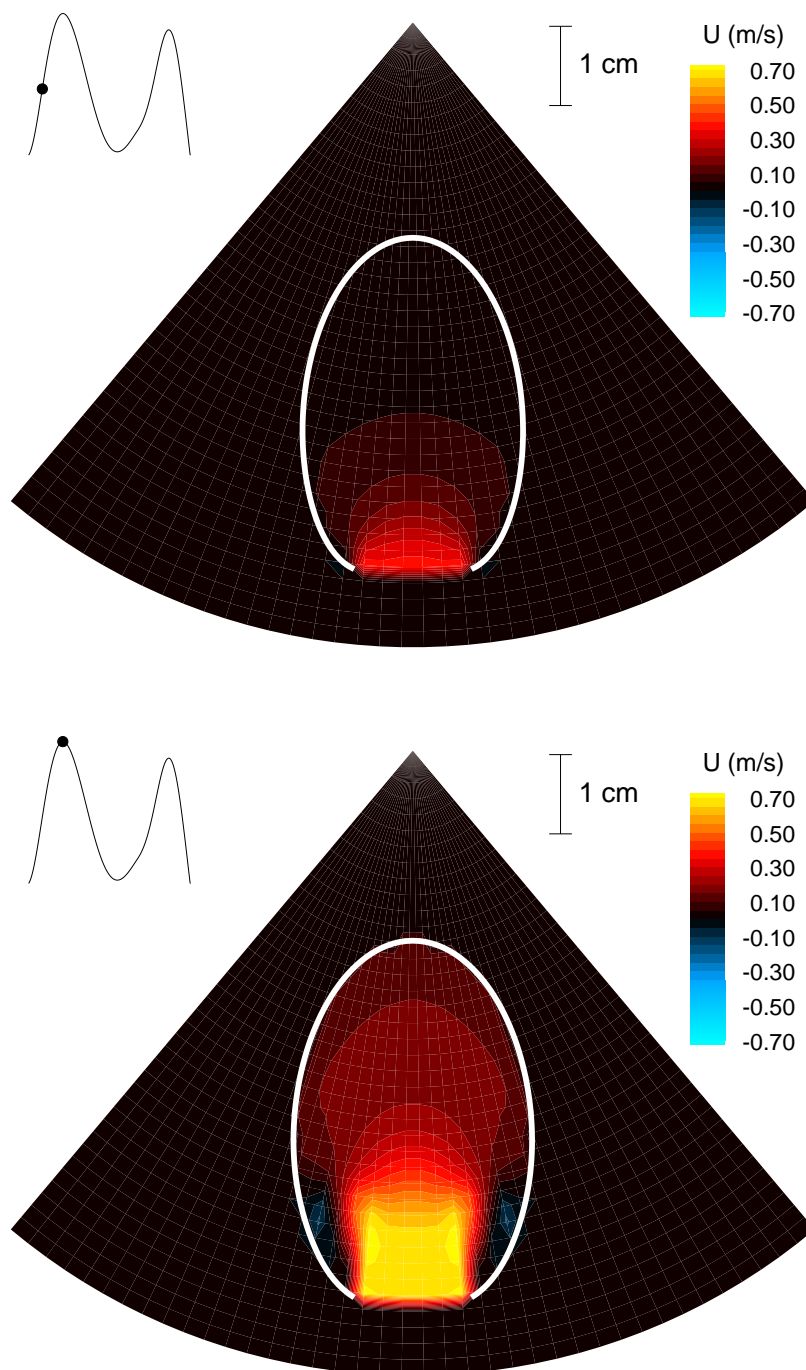
9.2.5 Klinische toepassingen

9.2.5a Simulatie van 2D echo-Doppler beelden

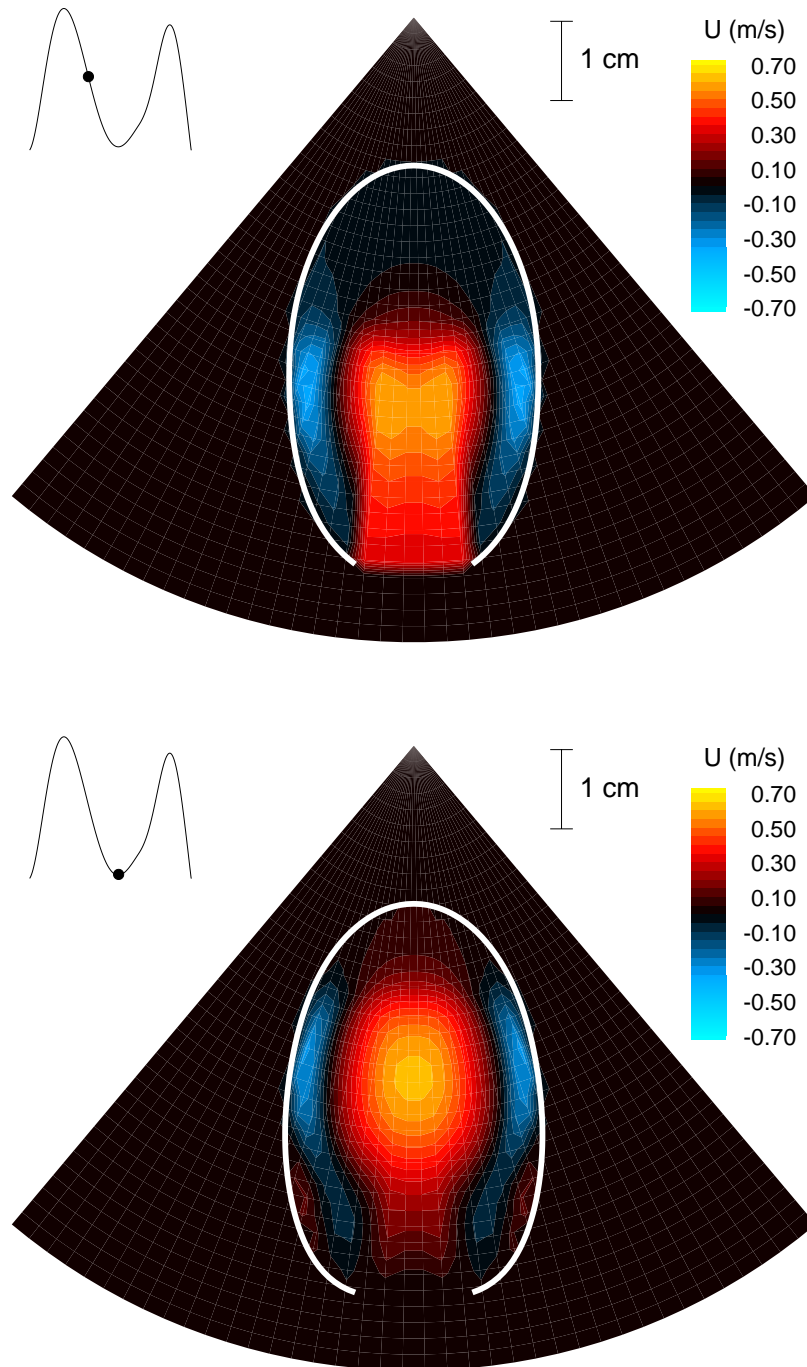
De snelheidsvectoren uit §9.2.2 kan men klinisch vertalen naar 2D echo-Doppler beelden. Er wordt een virtuele echoprobe geplaatst ter hoogte van de apex. Alle berekende beelden worden getoond op overeenkomstige tijdstippen in figuren 9.8, 9.9, 9.10 en 9.11. Snelheden naar de probe toe worden aangeduid in een rode tot gele kleur en worden als positief bestempeld, snelheden van de probe weg worden getoond in een donker- tot lichtblauwe kleur en zijn negatieve snelheden. De wervels worden gekarakteriseerd door het optreden van de blauwe kleuren naast de centrale rode tot gele kleur.

In de figuren kan men de eerste wervel waarnemen tijdens de deceleratiefase van de vroege vullingsgolf. Tijdens de diastase bevindt de wervel zich uitgestrekt langsheen de volledige ventrikelwand. Tijdens de acceleratiefase van de A-golf verdwijnen de wervels bijna volledig. Bij de deceleratie en het einde van de A-golf zijn de wervels opnieuw aanwezig.

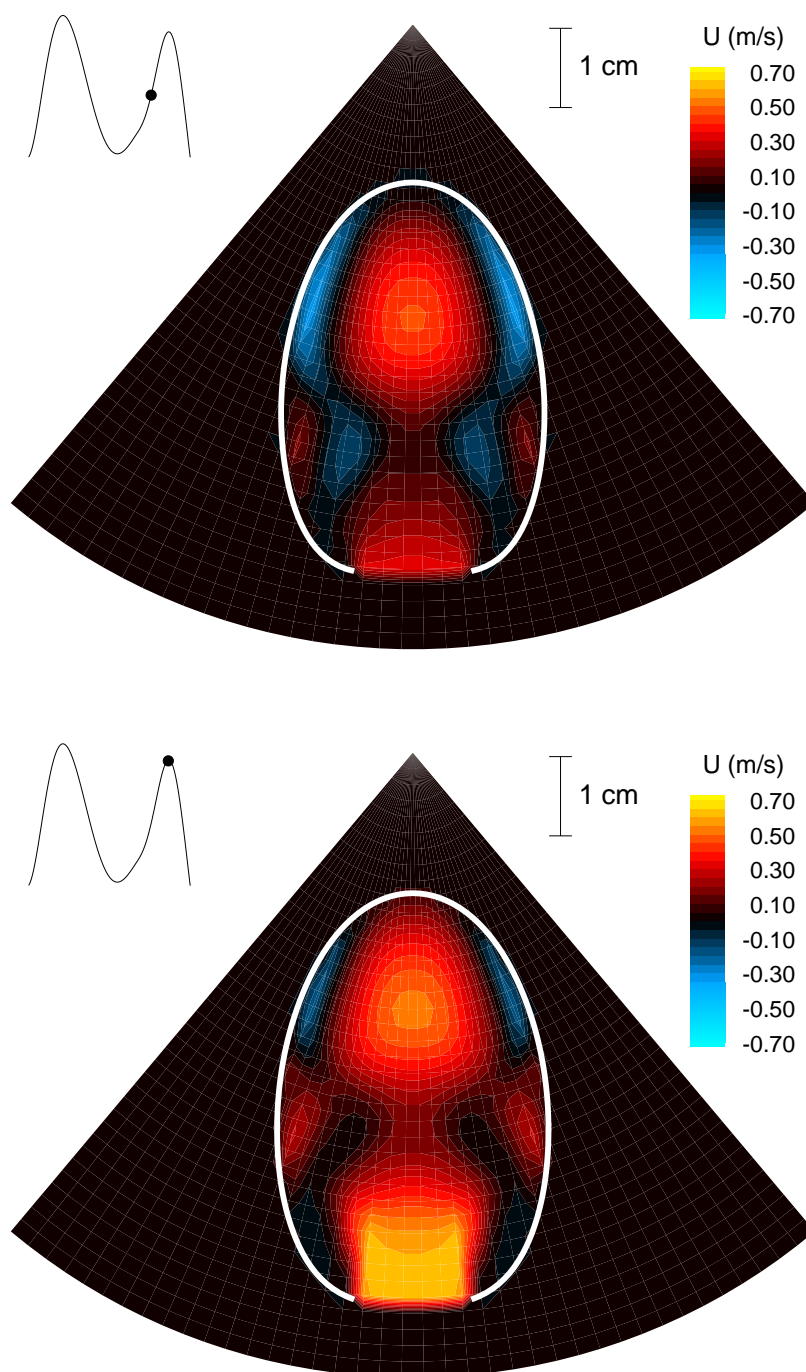
Omdat deze wervelvorming tijdens de berekeningen in het oog sprong, werd het bestaan ervan in vivo gecontroleerd. Er werd hiervoor gemeten op humane harten (UZ Gent). Deze validatie met in vivo metingen is enkel kwalitatief bedoeld. Figuren 9.12 en 9.13 tonen gemeten beelden tijdens de vroege vullingsfase. Langsheen de centrale rode stroming kan men inderdaad blauwe zones opmerken. Men moet opletten dat deze blauwe zones niet overeenstemmen met ge'alias'te positieve snelheden. Deze ge'alias'te snelheden kan men onderscheiden van de negatieve snelheden doordat positieve en negatieve snelheden normaal gescheiden worden door een zwarte zone van kleine snelheden. Wanneer er echter een plotse overgang is van een gele kleur naar een lichtblauwe kleur kan men zeker zijn dat men te maken heeft met 'aliasing'. Figuur 9.14 toont een gemeten beeld op het einde van de vroege vullingsfase. Er is terugstroming merkbaar aan beide zijden van de centrale stroming. Figuur 9.15 toont een gemeten beeld tijdens de diastase. Hier is het duidelijk dat er zich op dat ogenblik een grote wervel bevindt die zich bijna volledig uitstrekt in de ventrikel.



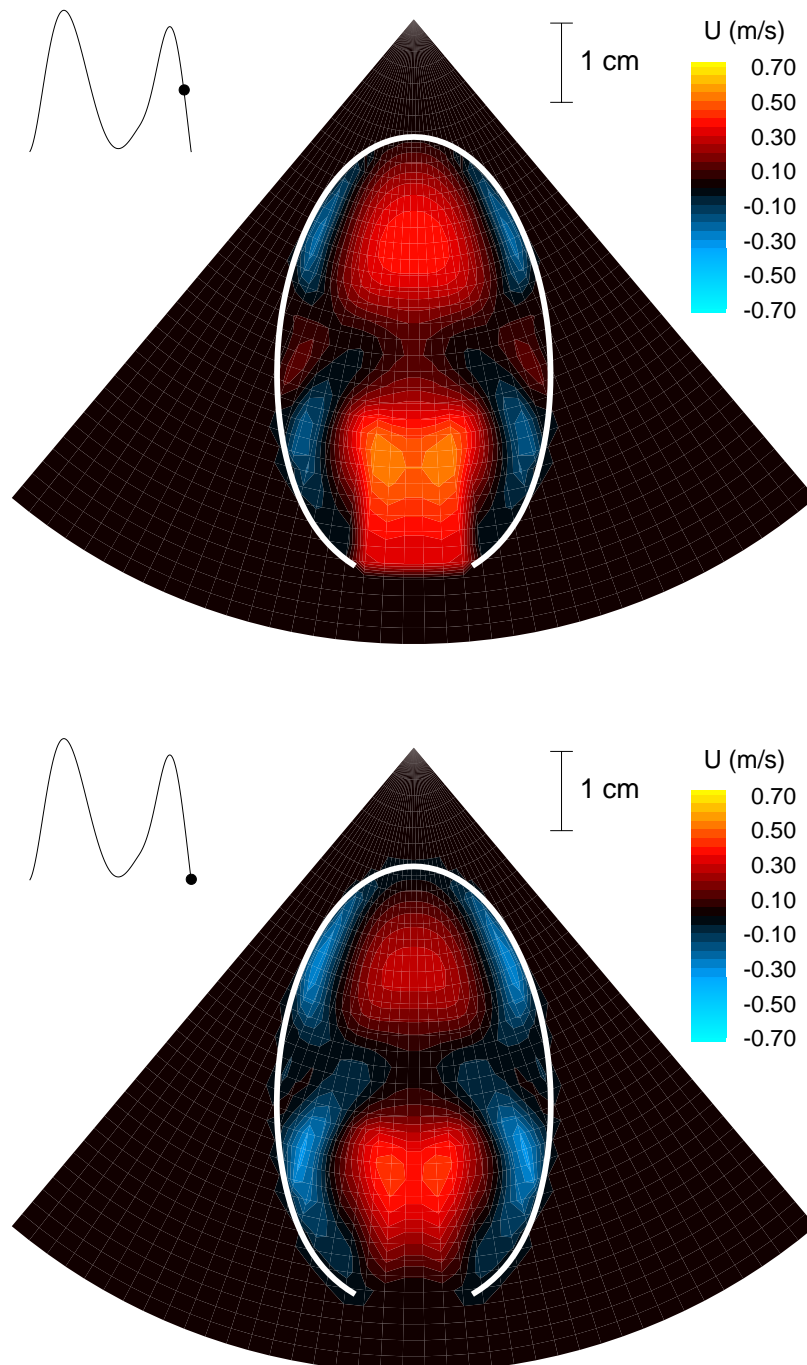
Figuur 9.8: Berekende 2D Doppler beelden, de snelheidscomponent in de richting van de echoprobe wordt getoond, positieve snelheden naar de probe toe, negatieve snelheden van de probe weg. Boven : acceleratie van de vroege vullingsgolf. Onder : maximum van de vroege vullingsgolf.



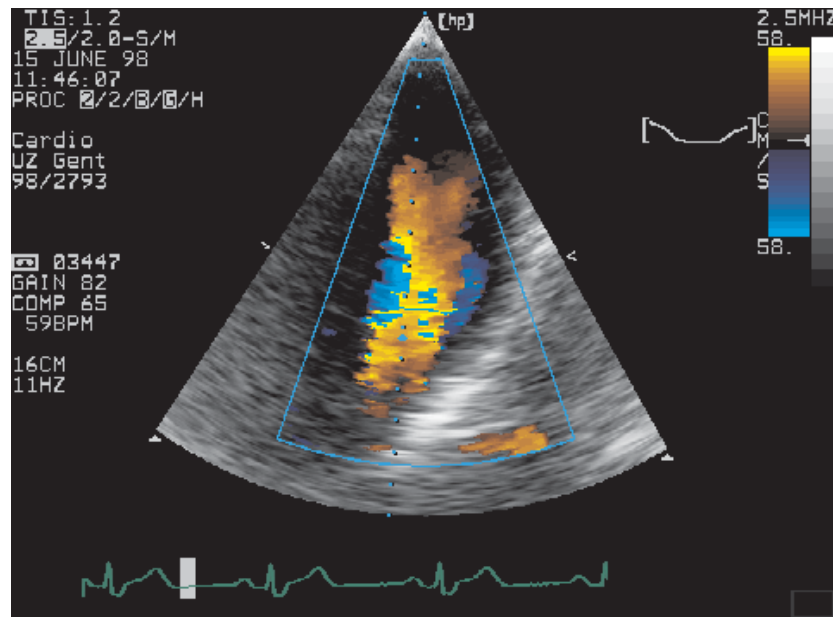
Figuur 9.9: Berekende 2D Doppler beelden, de snelheidscomponent in de richting van de echoprobe wordt getoond, positieve snelheden naar de probe toe, negatieve snelheden van de probe weg. Boven : deceleratie van de vroege vullingsgolf, terugstroming is duidelijk merkbaar. Onder : diastase, er is terugstroming langsheen de volledige ventrikelwand.



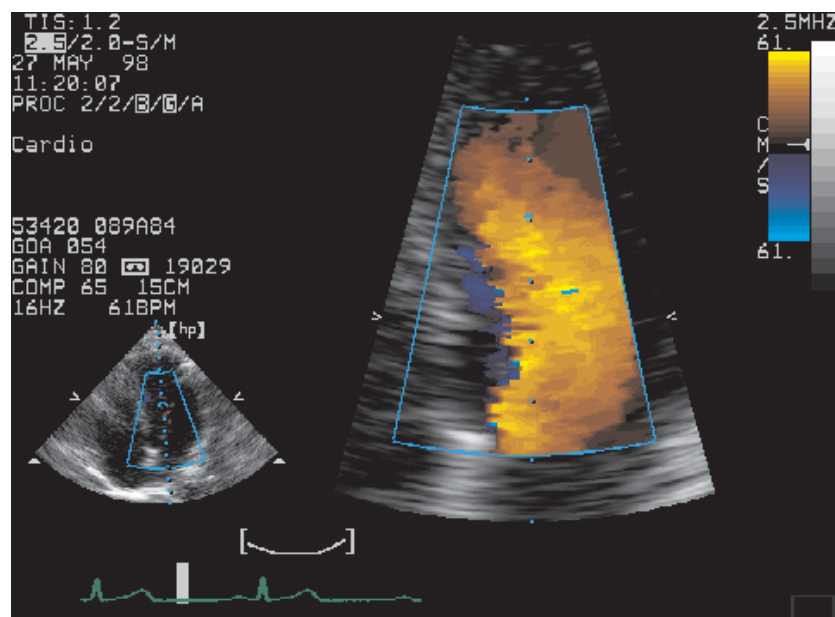
Figuur 9.10: Berekende 2D Doppler beelden, de snelheidscomponent in de richting van de echoprobe wordt getoond, positieve snelheden naar de probe toe, negatieve snelheden van de probe weg. Boven : acceleratie van de atriale vullingsgolf, de terugstroming vermindert. Onder : maximum van de atriale vullingsgolf, er is geen terugstroming merkbaar.



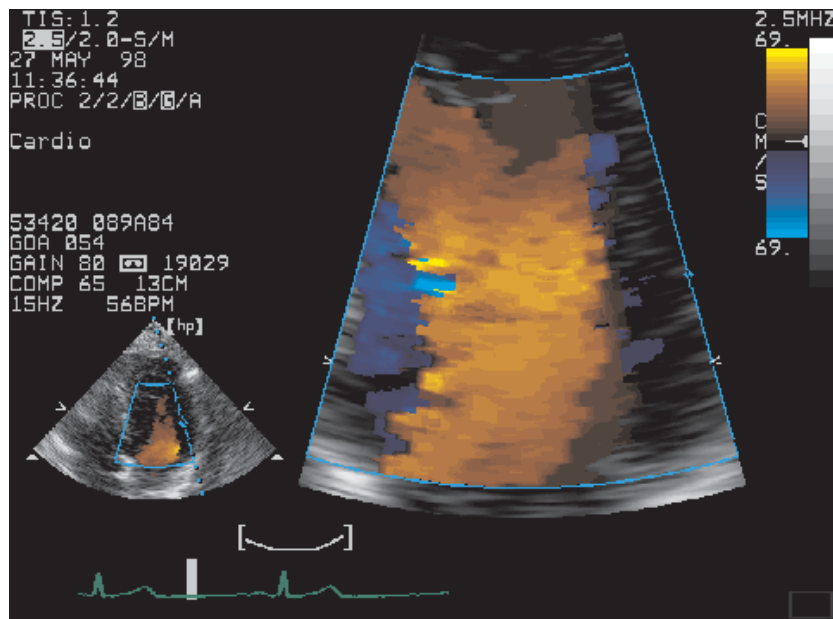
Figuur 9.11: Berekende 2D Doppler beelden, de snelheidscomponent in de richting van de echoprobe wordt getoond, positieve snelheden naar de probe toe, negatieve snelheden van de probe weg. Boven : deceleratie van de atriale vullingsgolf, opnieuw is er terugstroming merkbaar. Onder : sluiten van de mitraalklep, er is terugstroming merkbaar langsheen de volledige ventrikelwand.



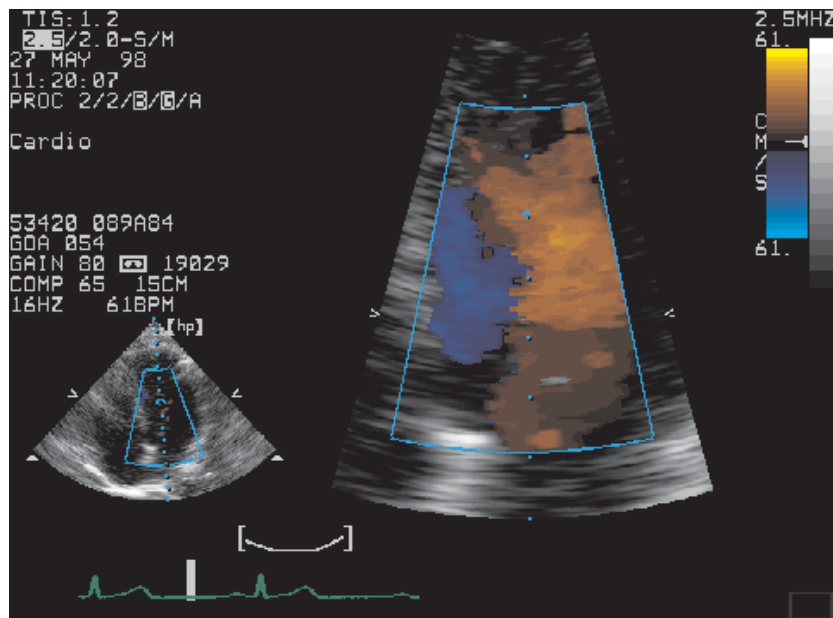
Figuur 9.12: Opgemeten 2D Doppler beeld tijdens de vroege vullingsgolf, er is terugstroming waarneembaar aan de rechterkant (ventrikelwand), aan de linkerkant (septum) treedt 'aliasing' op, waarneembaar door plotse overgang van de gele kleur naar de lichtblauwe.



Figuur 9.13: Opgemeten 2D Doppler beeld tijdens de vroege vullingsgolf, er is terugstroming waarneembaar aan de linkerkant (septum).



Figuur 9.14: Opgemeten 2D Doppler beeld op het einde van de vroege vullingsgolf, er is terugstroming waarneembaar aan beide zijden van de centrale stroming.



Figuur 9.15: Opgemeten 2D Doppler beeld tijdens de diastase, een grote wervel is waarneembaar.

9.2.5b Intraventriculaire drukgradiënten

Figuur 9.16 toont het intraventriculair drukverloop in functie van de tijd. Het drukverloop ter hoogte van de basis en de apex worden vergeleken.

Alvorens deze figuur te bespreken, worden de bevindingen van Courtois beschreven in hoofdstuk 3 nog eens samengevat :

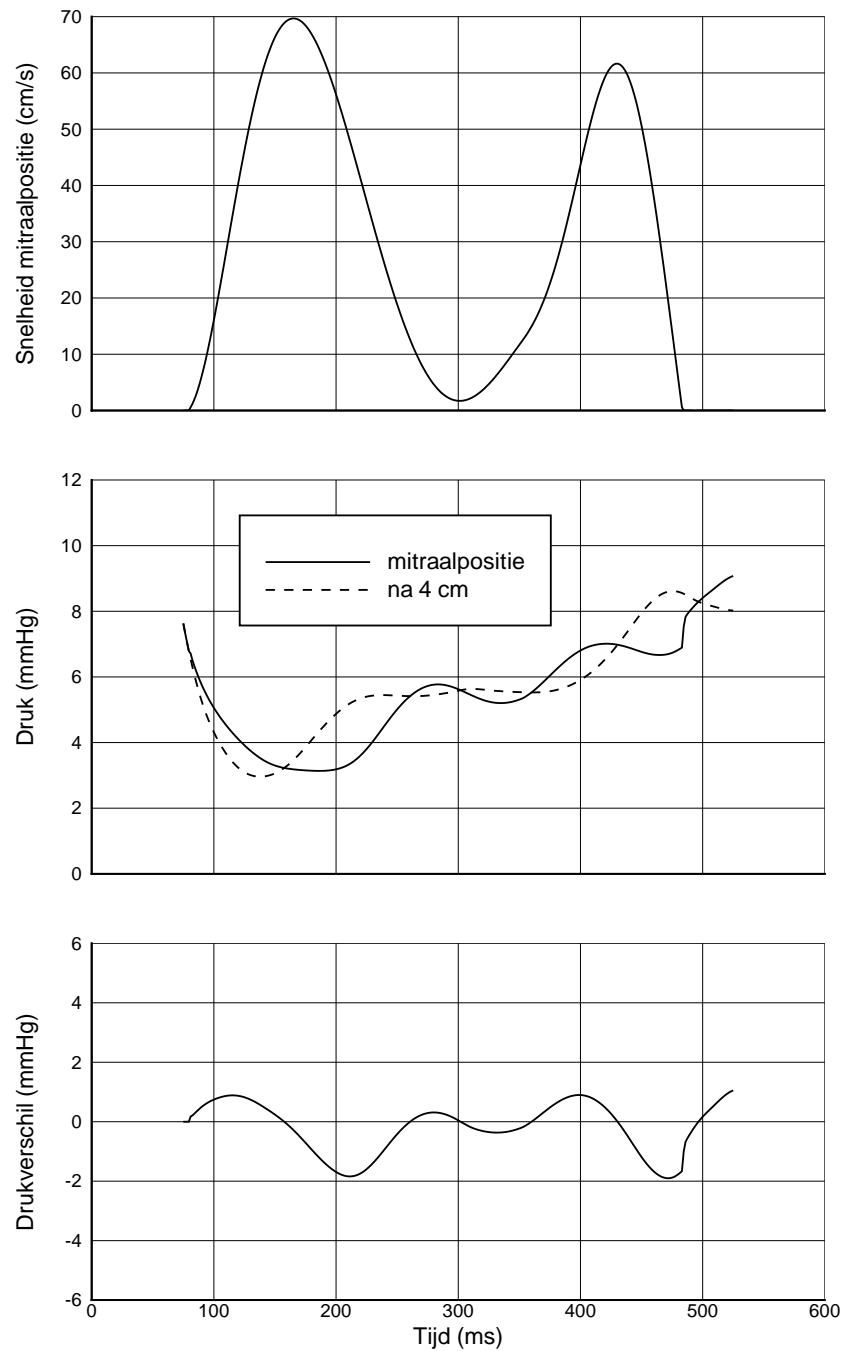
- de laagste diastolische druk wordt bereikt ter hoogte van de apex,
- dit minimum treedt op voordat het minimum aan de basis optreedt, zodat de drukstijging eerst merkbaar is aan de apex, nadien aan de basis,
- na een sterke daling van de druk in de apex volgt een sterke stijging en het optreden van een kenmerkende F-golf,
- tijdens de A-golf is de drukstijging eerst merkbaar aan de basis, nadien aan de apex.

Hierna wordt de verklaring die Courtois aan de waargenomen verschijnselen gaf (zie hoofdstuk 3) nog eens herhaald. Hij beweerde dat er tijdens de systole elastische energie wordt opgestapeld in de apex. Deze zorgt voor een 'recoil' bij het begin van de diastole. Hierdoor wordt bloed gezogen naar de apex toe, zodat deze eerst gevuld wordt, eventueel zelfs overgevoerd. Eenmaal de vulling van de apex voltooid is, stroomt het bloed afkomstig van de overvulling terug naar midventriculaire en basale zone. Dit stemt overeen met een actieve vulling. De drukstijging ten gevolge van de atriale contractiegolf wordt daarentegen eerst waargenomen ter hoogte van de basis en pas later in de apex. Dit stemt overeen met een passieve vulling.

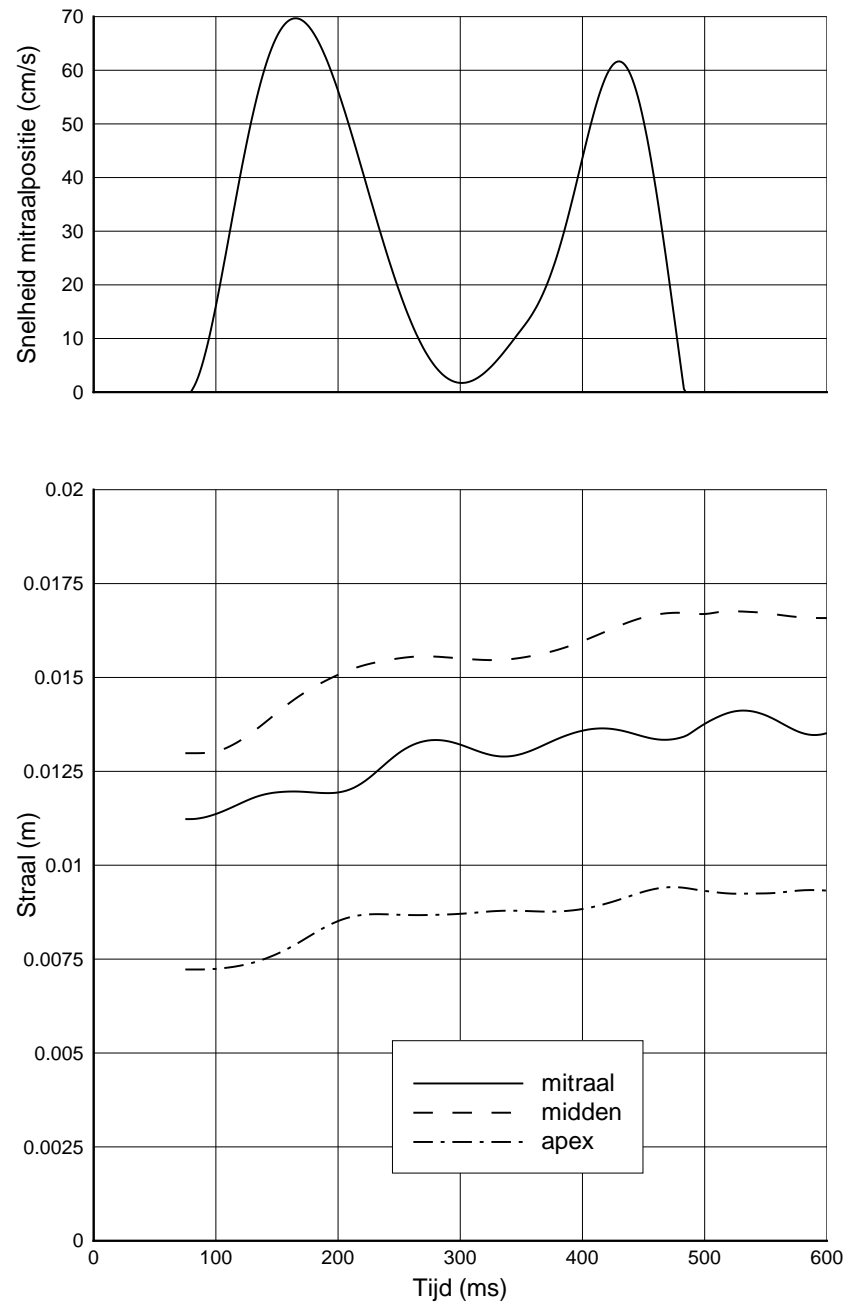
Figuur 9.16 toont dat de laagste diastolische druk optreedt ter hoogte van de apex, dat dit minimum optreedt voordat het minimum aan de basis bereikt wordt en dat na de daling van de druk in de apex de druk sterk toeneemt, resulterend in een F-golf. Bij het begin van atriale contractie vertoont het drukverloop eerst een toename aan de basis. Nadien wordt deze drukstijging in de apex waargenomen. Het einde van de atriale relaxatie wordt in het model niet meer fysiologisch weergegeven. Op dat ogenblik begint immers de ventrikel te contraheren. Deze contractie is in het model niet gesimuleerd.

Figuur 9.17 toont aan dat de vulling tijdens de vroege diastole zich eerst voltrekt in de apex (plateau in de curve) en nadien aan de basis. Deze figuur stemt kwalitatief goed overeen met de experimenteel opgemeten figuur 3.1.

In de berekening worden de fysiologische fenomenen beschreven door Courtois gereproduceerd. Er wordt echter nergens elastische energie opgeslagen in het numeriek



Figuur 9.16: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden: Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Referentieberekening, kwalitatief te vergelijken met figuur 3.3. Onder: Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



Figuur 9.17: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Onder: Evolutie van de straal van de ventrikel op 0.5 cm, 3.5 cm en 5.5 cm van de mitraalopening, kwalitatief te vergelijken met figuur 3.1.

model. Dit betekent dat de hypothese van Courtois niet juist is. Courtois zag dat na de opening van de mitraalklep de apicale druk ging afwijken van de atriale druk en besloot hieruit dat de apex een actieve rol had in de vulling. In figuur 9.16 wordt getoond dat dit een verkeerde redenering is : indien de mitraalklep niet zou openen zou de druk in de ventrikel verder blijven dalen omdat de relaxatie nog aan de gang is. Indien de klep wel opent zal de druk aan de basis eerst afwijken van het drukverloop zonder instroming door de klep. De druk aan de apex blijft het drukverloop zonder instroming door de klep het langst volgen. De eerste actie gebeurt dus wel degelijk aan de basis en stemt overeen met een passieve vullingsgolf.

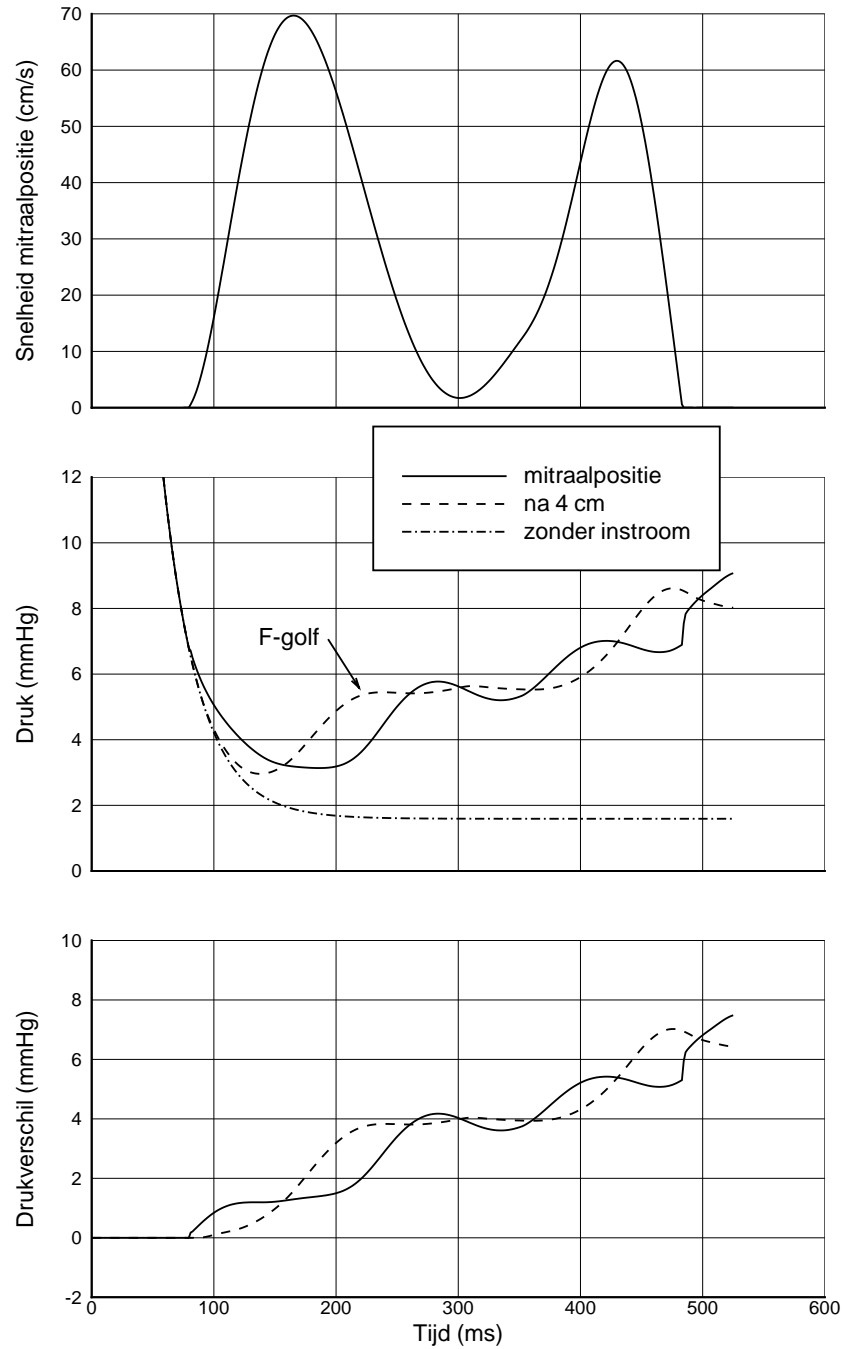
Dit wordt nog duidelijker getoond in het onderste deel van figuur 9.18, waar het verschil wordt getoond tussen het drukverloop met en zonder opening van de mitraalklep. Het intraventriculair drukpatroon moet dus als een superpositie van de drukdaling door relaxatie en het drukpatroon van een passieve vulling gezien worden. Dit drukpatroon van de passieve vulling is op zich een superpositie van de gemiddelde druk in de ventrikel die stijgt omdat de ventrikel gevuld wordt (statisch druk-volume verband) en een dynamisch drukgolfpatroon ten gevolge van de vullingsgolf.

Het minimum in de apex wordt bereikt kort nadat de vullingsgolf de apex bereikt. Op dat ogenblik stijgt de druk ter hoogte van de apex sterk omdat deze golf er weerkaatst wordt (weerkaatsing aan een gesloten uiteinde). Deze weerkaatsing van de drukgolf ter hoogte van de apex werd reeds beschreven door Owen [93]. De drukstijging overtreft de drukdaling ten gevolge van de relaxatie zodat de druk door een minimum gaat. Er zal blijken uit de parameterstudie dat het tijdsverschil tussen het optreden van het minimum van de druk in de apex en in de basis voornamelijk wordt beïnvloed door de tijdsconstante van de isovolumetrische relaxatie.

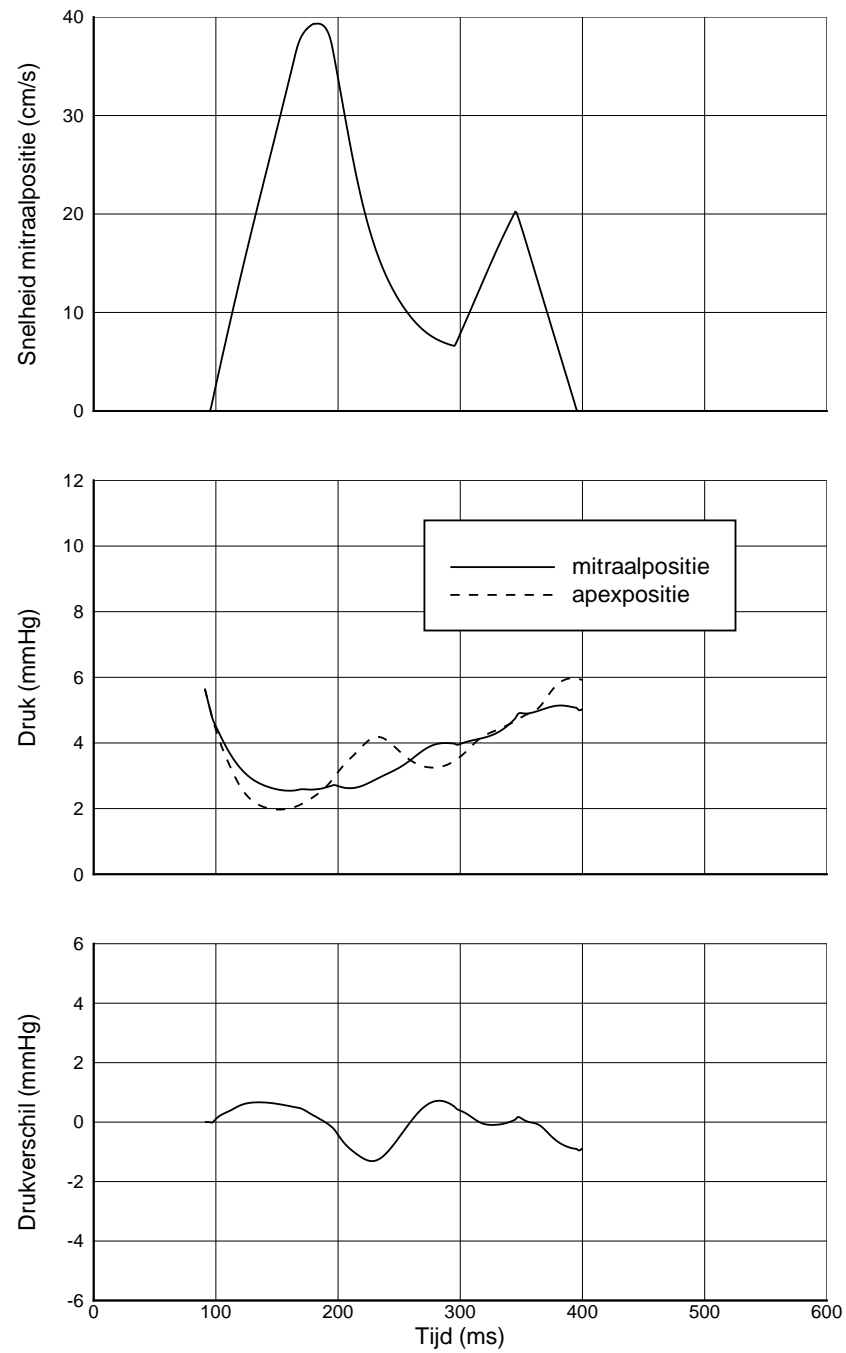
De drukstijging ten gevolge van de vroege vullingsgolf gaat door een maximum. Dit maximum zal dus ook de apex bereiken en is daar ongeveer dubbel zo groot (door de weerkaatsing van de golf). Dit verklaart de F-golf in figuur 9.18.

De vulling voltrekt zich eerst aan de apex. Echter op figuur 9.17 blijkt dat de vulling eerst start aan de basis. Op het ogenblik dat deze vullingsgolf de apex bereikt, wordt deze overvuld. Nadien zal de rest van de ventrikel vullen, maar dit gebeurt hoofdzakelijk doordat bloed doorheen de mitraalklep naar binnen blijft stromen. De bijdrage van het bloed afkomstig van de overvulling in de apex is miniem (slechts minieme terugstroming en afname van de straal ter hoogte van de apex).

Er is reeds een ééndimensionaal model ontwikkeld om deze intraventriculaire drukgradiënten te bestuderen [141, 145, 146]. Dit model wordt beschreven in appendix C. Figuur 9.19 toont het intraventriculair drukverloop in functie van de tijd berekend met dit ééndimensionaal model. Het drukverloop ter hoogte van de basis en de apex worden vergeleken. Kwalitatief worden dezelfde resultaten bekomen als met het tweedimensionaal model.



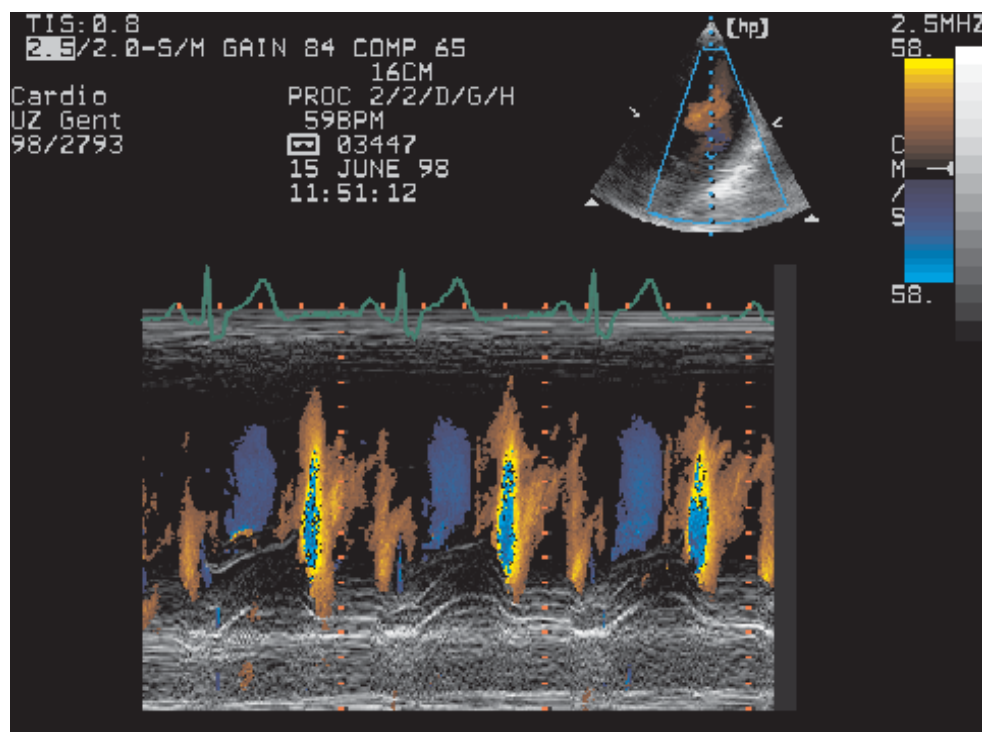
Figuur 9.18: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden: Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel met instroming, en zonder instroming (gesloten mitraalklep, uitsluitend relaxatie). Onder: Verschil van drukverlopen met en zonder instroming aan de mitraalpositie en op 4 cm in de ventrikel.



Figuur 9.19: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Onder : Intra-ventriculaire drukken berekend met het ééndimensionale model.

9.2.5c Kleuren Doppler M-mode

Figuur 9.20 toont een opgemeten kleuren M-mode beeld. Er wordt slechts één enkele scanlijn van de echoprobe gebruikt om dit beeld te vormen. Om de vroege en atriale vullingsgolf te bestuderen wordt de echoprobe ter hoogte van de apex geplaatst en wordt een scanlijn doorheen de mitraalklep genomen. De kleurinformatie in dit beeld wijst opnieuw op snelheden in de richting van de echoprobe (zie ook §9.2.5a). Op een verticale lijn worden de snelheden langsheen de scanlijn getoond voor een bepaald tijdstip. Deze gekozen scanlijn vindt men terug in het 2D beeld bovenaan de figuur. De posities dichtbij de echoprobe vindt men bovenaan de kleuren M-mode terug. De apex bevindt zich dus bovenaan, het atrium onderaan. Op een horizontale lijn worden de snelheden in functie van de tijd getoond op een welbepaalde positie langsheen de scanlijn. De horizontale lijn ter hoogte van de mitraalklepopening komt overeen met het opgelegde snelheidsprofiel aan de mitraalopening.



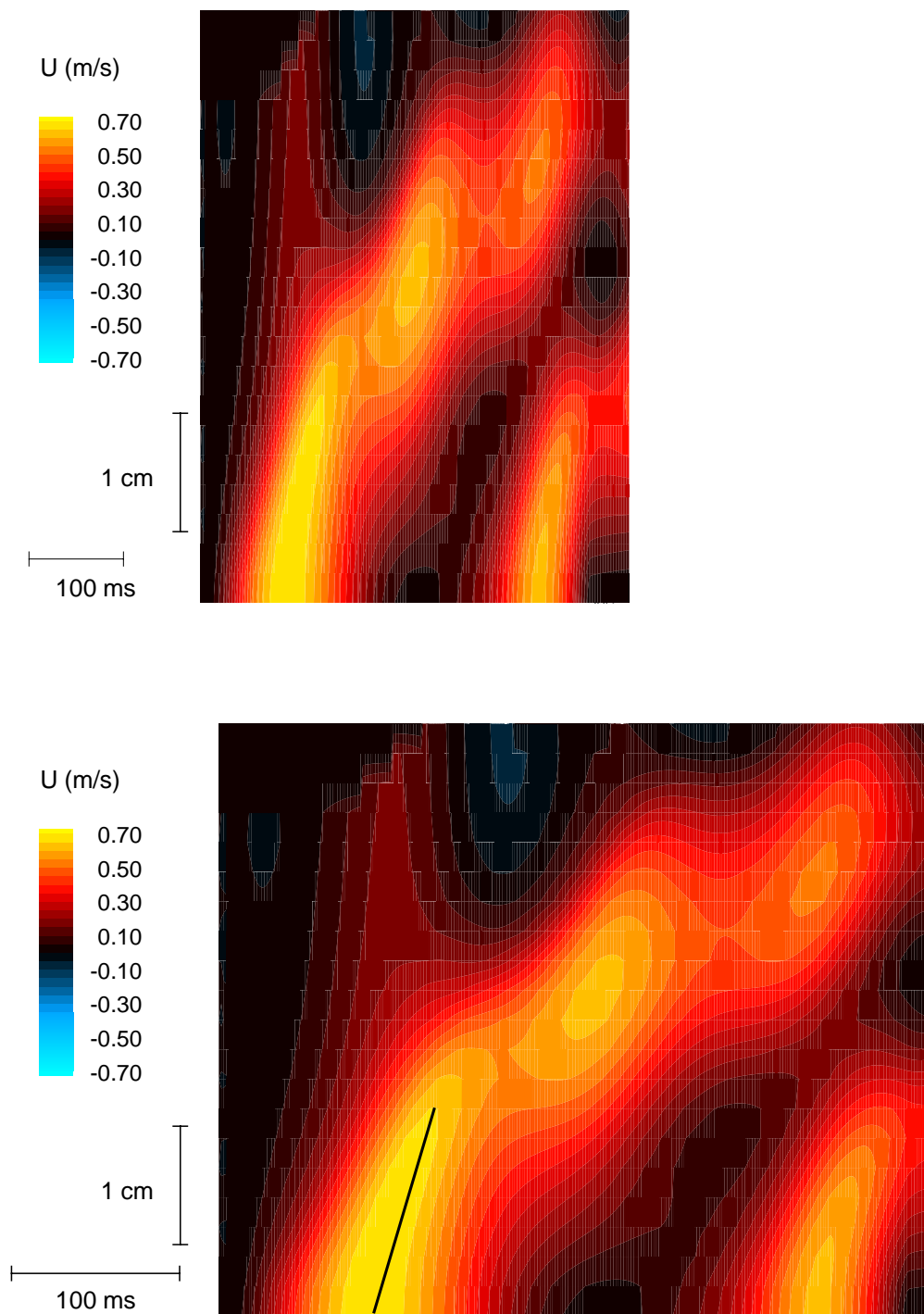
Figuur 9.20: Opgemeten kleuren M-mode beeld.

Men kan op het kleuren M-mode beeld de voortplanting van de vullingsgolf volgen. Op dit beeld kan gezien worden dat de vullingsgolf ter hoogte van de mitraalklep ontstaat wanneer deze opent. Op dat ogenblik kan er een golf waargenomen worden die richting apex loopt (compressiegolf, met deze golf gaat een druktoename gepaard) alsook een golf die in het atrium loopt (expansiegolf, met deze golf gaat een drukafname gepaard). Bij de atriale contractie loopt de golf vanuit het atrium naar de apex.

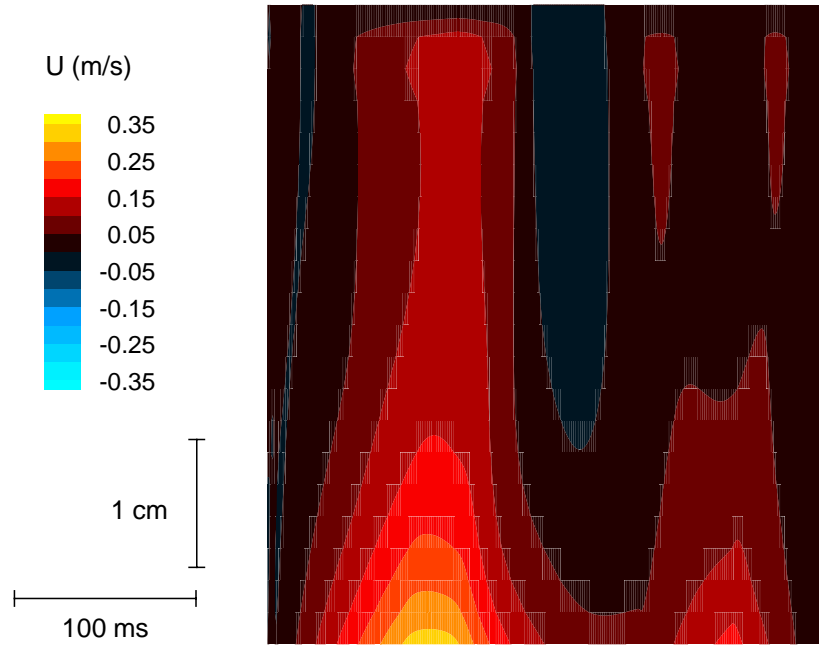
Brun et al. [10, 30] waren de eersten die vaststelden dat de golfvoortplantingssnelheid van de vullingsgolf in de linkerventrikel informatie bevat over de linkerventrikelvulling. Deze golfvoortplantingssnelheid is verschillend van de Doppler snelheden die traditioneel gemeten worden aan de tippen van de mitraalklep. Takatsuji et al. [124] hebben aangetoond dat deze golfvoortplantingssnelheid kan gebruikt worden om de ambiguïteit die aanwezig is bij de evaluatie van de E/A-verhouding te helpen oplossen (zie §2.2.3c). Brun et al. hebben ook aangetoond dat deze golfvoortplantingssnelheid goed correleert met invasief gemeten parameters van diastolische functie zoals maximaal negatieve dp/dt (tijdens de relaxatie van de ventrikel) en τ (tijdsconstante van de deze relaxatie) waarbij de diastolische functie veranderd werd door intracoronaire toediening van dobutamine. Stugaard et al. [123, 122, 121, 120] hebben vastgesteld dat deze golfvoortplantingssnelheid duidelijk afneemt tijdens acute ischemie geïnduceerd door ballonocclusie van de coronaire arteriën in een dierenexperimenteel model of tijdens percutane coronaire ballonangioplastie bij patiënten.

Figuur 9.21 toont het berekende kleuren M-mode beeld waarbij de echoprobe ter hoogte van de apex wordt geplaatst en de scanlijn samenvalt met de symmetrie-as. Er kan duidelijk een vroege en atriale vullingsgolf worden waargenomen. Het beeld dat berekend wordt, toont enkel de golf in de ventrikel omdat er geen berekening in het atrium is gebeurd. De voortplantingssnelheid van de golf (berekend uit de verschuiving van de ruimtelijke maxima, zie figuur 9.21) bedraagt 47 cm/s. Deze golfvoortplantingssnelheid bedraagt ongeveer 65 % van de plaatselijk optredende snelheden. Dit wordt ook in vivo waargenomen.

In het ééndimensionale model wordt een uniform snelheidsprofiel aangenomen in de richting loodrecht op de symmetrie-as. De snelheid in het ééndimensionale model komt dus overeen met de gemiddelde snelheid over een doorsnede loodrecht op de symmetrie-as. Aangezien het snelheidsprofiel echter niet uniform is door het optreden van de wervels is deze gemiddelde snelheid van het ééndimensionale model veel kleiner dan de optredende snelheden langsheen de symmetrie-as in het tweedimensionaal model. Een kleuren M-mode beeld berekend aan de hand van het ééndimensionale model wordt getoond in figuur 9.22. Dit beeld stemt niet overeen met in vivo opgenomen beelden. Een ééndimensionale berekening volstaat dus niet kleuren M-mode beelden te bestuderen.



Figuur 9.21: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 2D stromingssimulatie voor de referentieberekening : zowel de vroege als atriale vullingsgolf zijn duidelijk waarneembaar. Boven: verhouding van beide assen zoals in echo-Doppler toestel. Onder: zelfde beeld maar met een uitgerekte tijdsas.



Figuur 9.22: Kleuren M-mode beeld uit de 1D stromingssimulatie, dit beeld stemt kwalitatief niet overeen met in vivo opgemeten beelden.

9.2.5d Niet-stationaire Bernoulli-vergelijking

Achtergrond In §3.5 werd reeds vermeld dat deze intraventriculaire drukgradiënten verdwijnen gedurende ischemie. Meer nog : het verdwijnen van deze gradiënten blijkt één van de vroegste en meest gevoelige indicatoren te zijn voor de aanwezigheid van myocardiale ischemie. Deze observatie bewijst het klinisch belang van de mogelijkheid om deze drukgradiënten te kunnen meten. Wanneer dit zou kunnen uitgaande van niet-invasieve metingen is dit aangewezen, aangezien een invasieve ingreep steeds een risico inhoud voor de patiënt.

Uitgaande van de snelheden gemeten via kleuren M-mode beelden kan men drukverschillen tussen twee posities in de linkerventrikel reconstrueren aan de hand van de één dimensionale Euler-vergelijking [48]. Deze wordt gegeven door

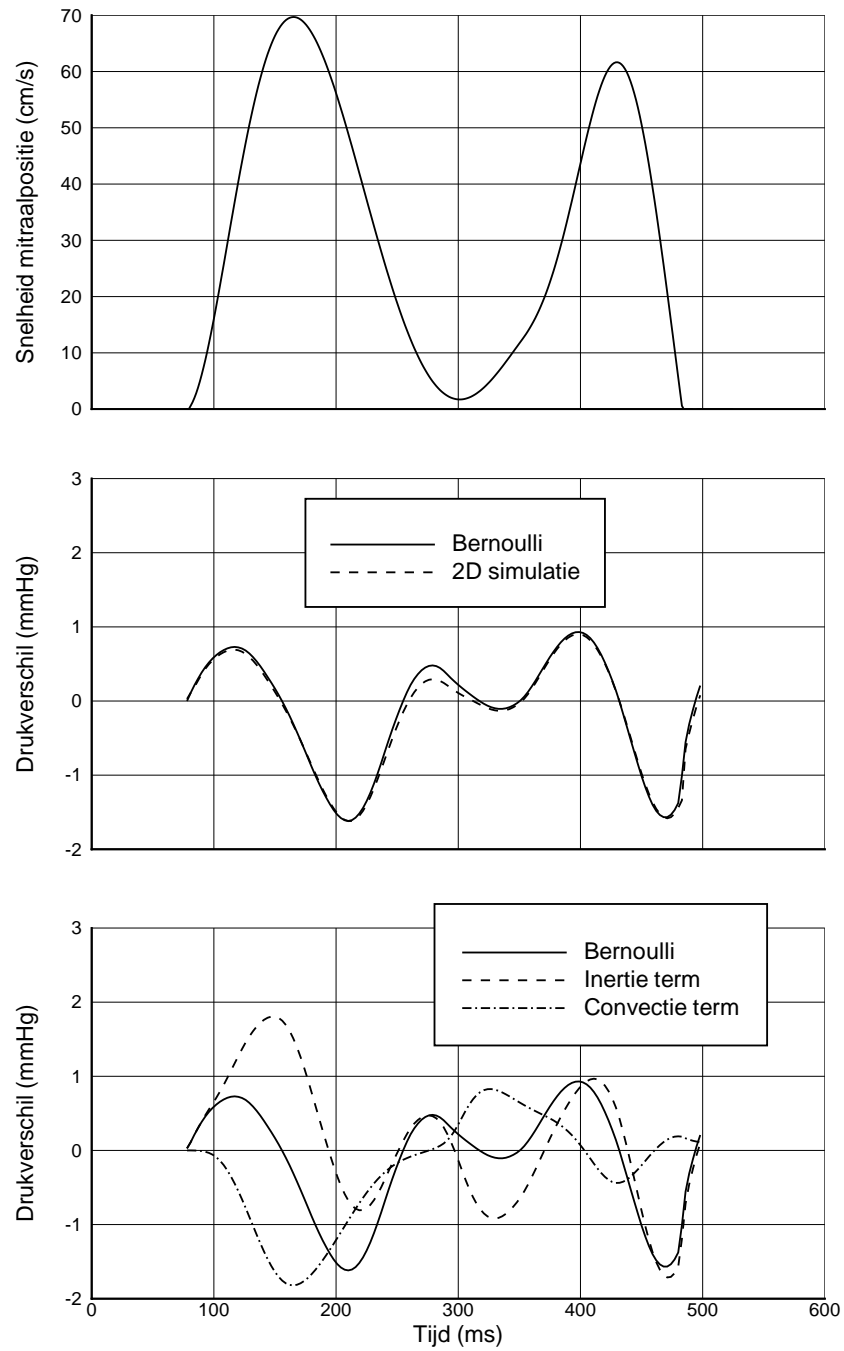
$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right). \quad (9.1)$$

Deze vergelijking geldt langsheen een stroomlijn. Om deze vergelijking toe te passen op een kleuren M-mode meting, dient de scanlijn dus zo goed mogelijk samen te vallen met een stroomlijn. Door differentiatie van de snelheidsdistributie, zowel in de ruimte als in de tijd, kan men de distributie van de drukgradiënt in de ruimte berekenen. Integratie van deze verdeling tussen twee punten van de stroomlijn verschaft een ogenblikkelijke drukverschil tussen deze punten.

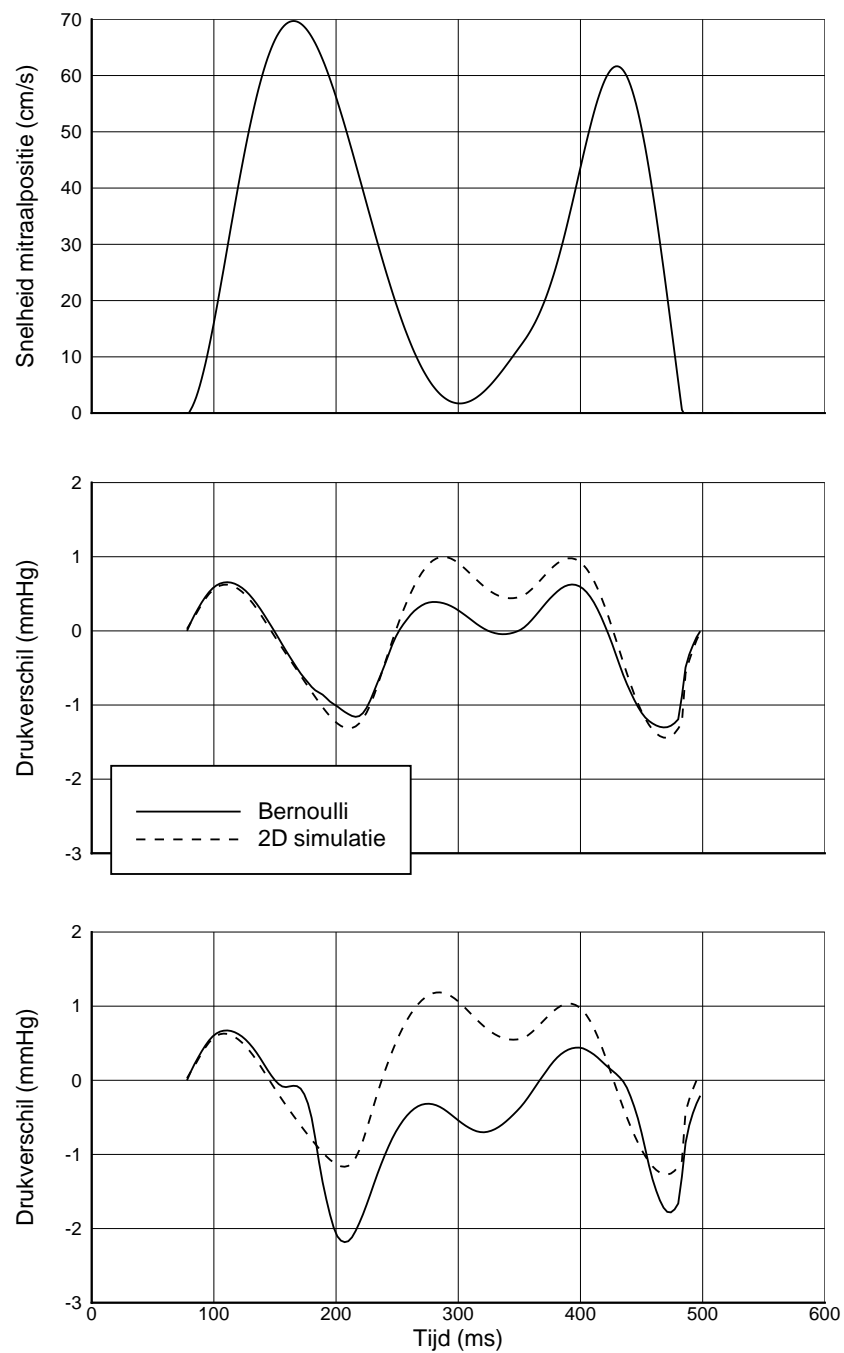
Met het numerieke model is het mogelijk om de gevoeligheid van deze meetmethode te controleren indien de scanlijn niet samenvalt met een stroomlijn. Eerst wordt gecontroleerd of er een goede overeenkomst wordt bereikt langsheen een stroomlijn. Dit is een test voor de nauwkeurigheid van de tweedimensionale simulatie. Nadien wordt de gevoeligheid bestudeerd.

Simulatie Figuur 9.23 toont de toepassing van de methode op de berekende snelheidspatronen langsheen de symmetrie-as. Aangezien de symmetrie-as samenvalt met een stroomlijn moet het drukverschil berekend door integratie van vergelijking (9.1) overeenstemmen met het drukverschil berekend met het tweedimensionale model. Dit blijkt duidelijk uit de figuur. Er wordt ook getoond wat de relatieve bijdragen zijn van de inertieterm en de convectieterm. Het is duidelijk dat de inertieterm niet mag verwaarloosd worden [49].

Figuur 9.24 toont de gevoeligheid van deze methode indien de scanlijn niet samenvalt met een stroomlijn. De echoprobe wordt aan de apex verplaatst in de richting loodrecht op de symmetrie-as en gedraaid zodat de scanlijn nog steeds door het midden van de mitraalklep gaat maar 10° of 20° afwijkt van de symmetrie-as. In beide gevallen wordt gedurende de acceleratie van de vroege vullingsgolf een goede overeenstemming bereikt. In het geval van 10° afwijking worden de drukverschillen gedurende de deceleratiefase van de vroege vullingsgolf en de atriale vullingsgolf ook goed benaderd. Alleen tijdens de diastase is er een afwijking tussen de twee drukken van ongeveer 0.5 mmHg. Voor het geval van 20° afwijking van de scanlijn ten opzichte van de symmetrie-as is de fout na de acceleratiefase van de vroege vullingsgolf maximaal 1.5 mmHg en worden negatieve drukverschillen voorspeld daar waar er positieve aanwezig zijn. Dit gebeurt vooral tijdens de diastase. De drukverschillen berekend uit de snelheidsinformatie moeten dus met omzichtigheid geïnterpreteerd worden daar waar er onzekerheid bestaat omtrent de juiste richting van de stroming. En dit is in de ventrikel bijna steeds het geval.



Figuur 9.23: Boven: Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverschil tussen basis en apex in functie van de tijd opgemeten uit de 2D simulatie. Vergelijking met drukverschil berekend uit Bernoulli-vergelijking langsheen de symmetrie-as (stroomlijn). Onder : Drukverschil berekend uit Bernoulli-vergelijking, opsplitsing in inertie term en convectieve term.



Figuur 9.24: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverschil tussen basis en apex in functie van de tijd opgemeten uit de 2D simulatie in punten op een scanlijn die een hoek maakt van 10° met de symmetrielij. Vergelijking met drukverschil berekend uit Bernoulli-vergelijking. Onder : Idem als midden, de hoek tussen scanlijn en symmetrielij bedraagt hier 20° .

9.3 Parameterstudie

In dit deel worden volgende invloeden onderzocht :

- relaxatiesnelheid van de ventrikel,
- compliantie van de ventrikel,
- amplitude van de vullingsgolven zodat E/A verhouding behouden blijft.

Voor de parameterstudie is geopteerd om het inlaatprofiel niet te wijzigen. Dit heeft volgend klinisch belang : stel dat men met de gepulste Doppler techniek in verschillende situaties dezelfde snelheidspatronen meet ter hoogte van de mitraalklep, hoe kan men dan met een bijkomende meting een onderscheid maken tussen een goede diastolische functie en een diastolische dysfunctie (zie §2.2.3c). Indien men deze bijkomende metingen met een niet-invasieve methode kan doen, is dit veel aangenamer voor de patiënt. Daarom wordt de invloed van voorgaande parameters onderzocht op kleuren M-mode beelden en op drukgradiënten in de ventrikel. Deze drukgradiënten kunnen immers berekend worden uit de kleuren M-mode beelden.

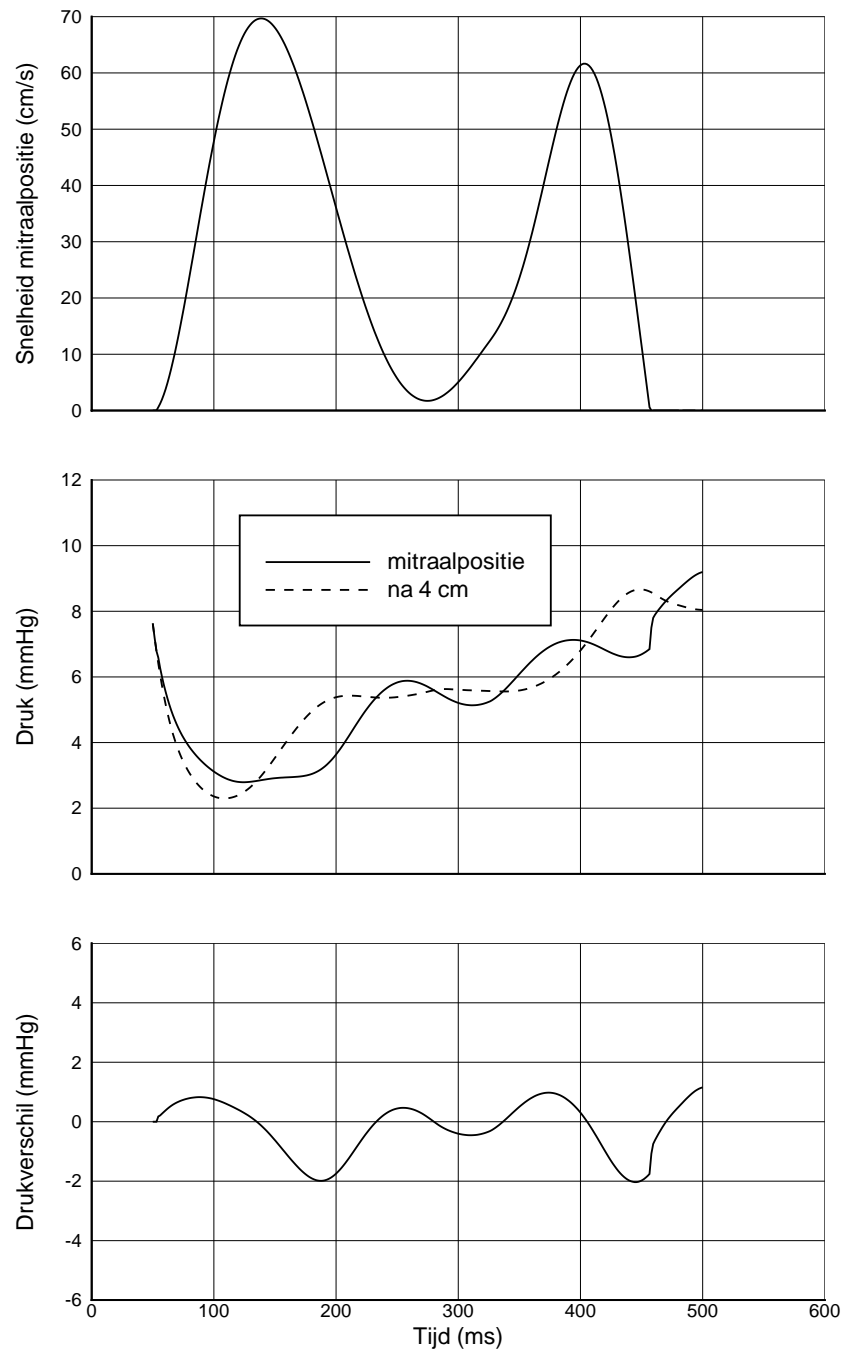
Verder wordt ook een discussie gehouden omtrent de invloed van de voorbelasting ('preload', de atriale druk waarbij de vulling van de ventrikel gebeurt).

Gedurende het variëren van één parameter worden de andere parameters constant gehouden.

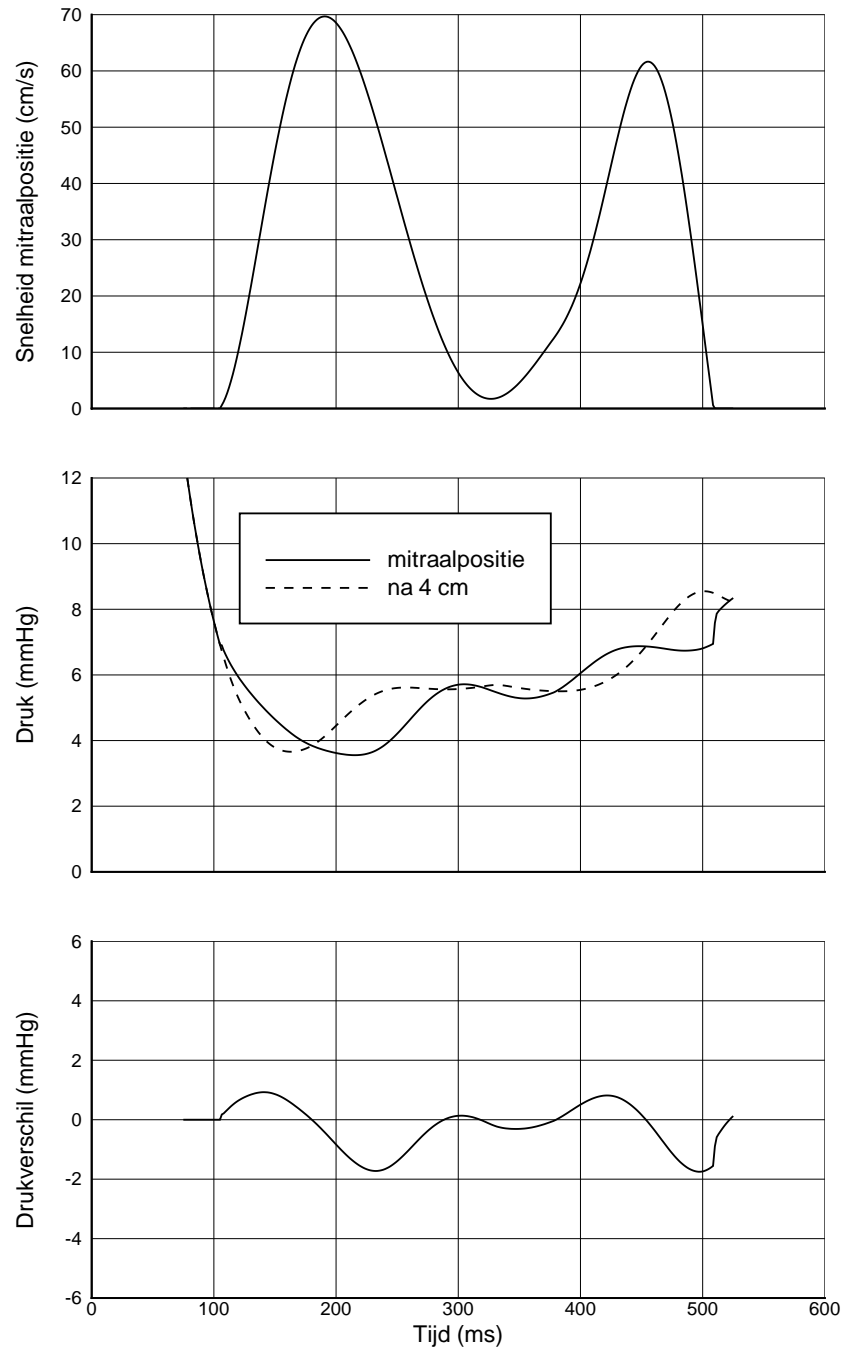
9.3.1 Invloed van de snelheid van de relaxatie van de ventrikel

Wanneer de ventrikel sneller (tijdsconstante kleiner) of trager (tijdsconstante groter) relaxeert, zal dit een invloed hebben op de intraventriculaire drukverlopen, omdat deze een superpositie zijn van de drukdaling door relaxatie en een passieve vullingsgolf (zie hierboven).

Figuren 9.25 en 9.26 tonen de intraventriculaire drukken en drukverschillen voor een snellere relaxatie ($\tau = 20$ ms) en een tragere relaxatie ($\tau = 40$ ms).



Figuur 9.25: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met snelle relaxatie : $\tau = 20$ ms. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



Figuur 9.26: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met trage relaxatie : $\tau = 40$ ms. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.

Wanneer de ventrikel sneller relaxeert opent de mitraalklep vroeger. De isovolumetrische relaxatietijd verkort. Hierdoor vervroegt de vulling. Ten opzichte van de referentieberekening is het snelheidspatroon ter hoogte van de mitraalklep dan ook naar links verschoven op de tijdsas. Voor de tragere relaxatie is de isovolumetrische relaxatietijd langer en bijgevolg is het snelheidspatroon naar rechts in de tijd verschoven.

Naarmate de relaxatie versnelt, verlaagt de minimale druk in de apex. Bij snellere relaxatie wordt ook het tijdsverschil tussen de minimale druk in de apex en minimale druk in de basis kleiner. Het minimum van de druk in de basis ligt wel hoger dan deze in de apex. Enkele kwantitatieve gegevens worden voorgesteld in tabel 9.2.

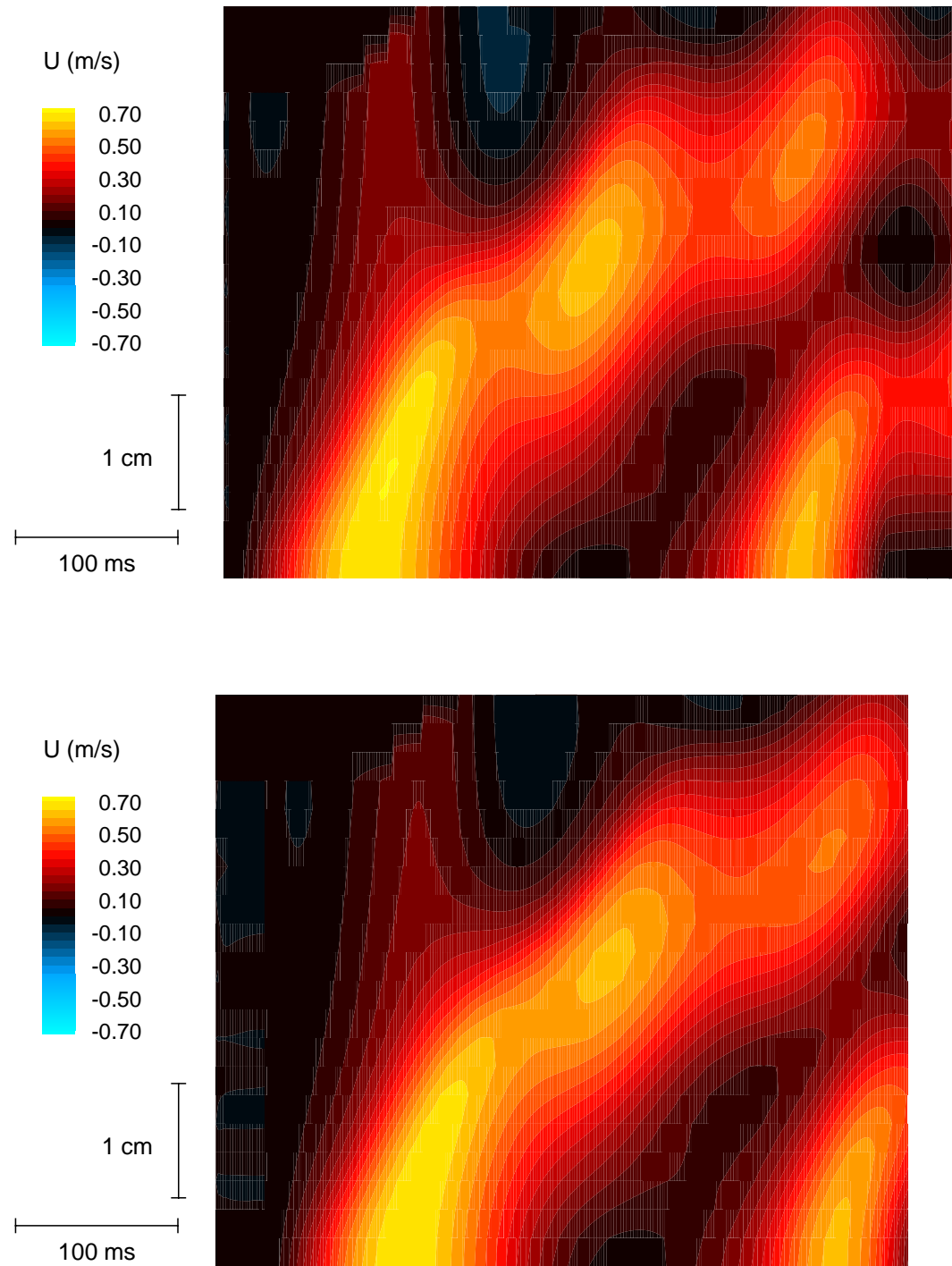
	$\tau = 20$ ms	$\tau = 30$ ms	$\tau = 40$ ms
Minimale druk basis [mmHg]	2.80	3.14	3.55
wordt bereikt na [ms]	71	107	110
Minimale druk apex [mmHg]	2.30	2.96	3.66
wordt bereikt na [ms]	56	58	61

Tabel 9.2: Tijdstip en grootte van de minimale druk ter hoogte van basis en apex. Het tijdstip wordt gerekend vanaf de opening van de mitraalklep.

Wanneer de golf de apex bereikt, zal de druk snel beginnen te stijgen door de reflectie van de golf. Op dat ogenblik wordt de minimale druk bereikt. Het tijdsverschil tussen het openen van de mitraalklep en het bereiken van de minimale druk is in de verschillende gevallen ongeveer gelijk. Aangezien de klep in de drie gevallen opent bij dezelfde atriale druk zal de minimale apicale druk afhangen van de relaxatietijdsconstante. Deze minimale druk wordt groter naarmate de relaxatietijdsconstante toeneemt.

Aan de basis is de initiële drukstijging ten gevolge van de vulling niet zo sterk. Wanneer de relaxatie nog volop aan de gang is (bij tragere relaxatie) neemt de drukdaling ten gevolge van de relaxatie de bovenhand. Pas wanneer de relaxatie bijna ten einde is, wordt de minimale basale druk bereikt.

Figuur 9.27 toont de berekende kleuren M-mode beelden bij de verschillende relaxatietijdsconstanten. Er kunnen niet echt significante verschillen waargenomen worden. Dit is wel in tegenspraak met de literatuur. Er wordt immers gerapporteerd [10, 120, 124] dat er een inverse correlatie bestaat tussen de relaxatietijdsconstante en de voortplantingssnelheid van de vullingsgolf. Deze discrepantie laat vermoeden dat in vivo de verandering van de relaxatietijdsconstante samengaat met de wijziging van andere parameters. In de discussie wordt hier verder nog op ingegaan.



Figuur 9.27: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 2D stromingssimulatie. Resultaten bij verschillende relaxatietijdsconstanten. Boven : $\tau = 20$ ms. Onder : $\tau = 40$ ms.

9.3.2 Invloed van de compliantie van de ventrikelwand

9.3.2a 2D simulatie

Figuren 9.28 en 9.29 tonen respectievelijk de invloed van een halvering en een verdubbeling van de compliantie van de ventrikel. De compliantie beïnvloedt het druk-volume verband. Bij een lagere compliantie is de helling van het druk-volume verband hoger, bij een hogere compliantie neemt deze helling af. Dit wordt duidelijk in de figuren gezien wanneer men kijkt naar het gemiddelde diastolische drukverloop. De amplitude van het drukverschil tussen basis en apex wordt daarentegen weinig beïnvloed door de compliantie. Dit komt doordat in beide gevallen dezelfde mitraalstroming wordt opgelegd.

Figuur 9.30 toont de berekende kleuren M-mode beelden bij de verschillende complianties. Hier kan men wel een onderscheid maken tussen de twee figuren. Zowel de helling van de vroege vullingsgolf als van de atriale vullingsgolf nemen af bij afnemende compliantie (toenemende stijfheid). Dit is nog duidelijker merkbaar bij hogere instroomsnelheden (zie figuur 9.36).

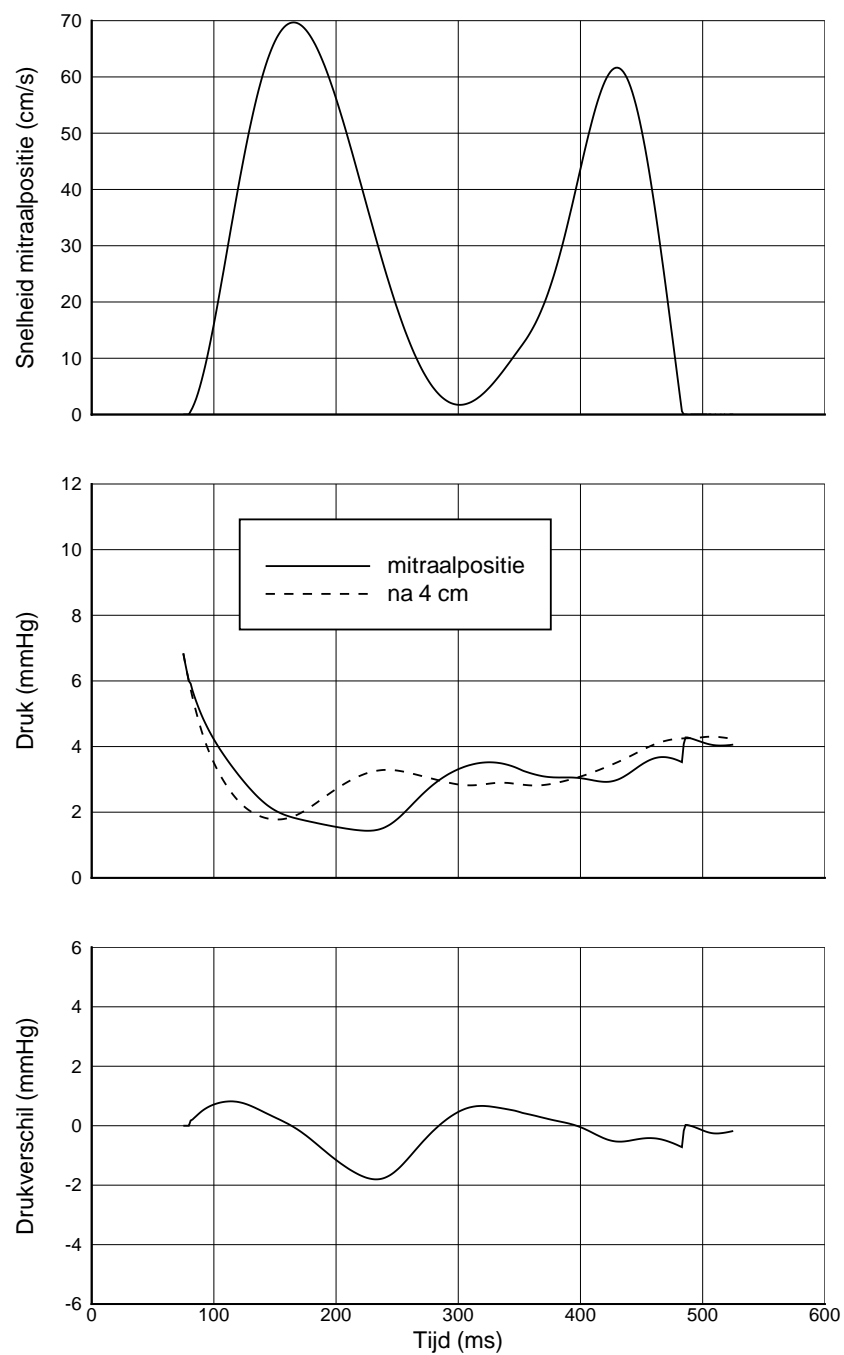
Dit verschijnsel is tegenstrijdig aan wat men zou verwachten bij de voortplanting van een ééndimensionale golf. Daarom wordt het ééndimensionale geval eerst grondig bestudeerd.

9.3.2b 1D analyse

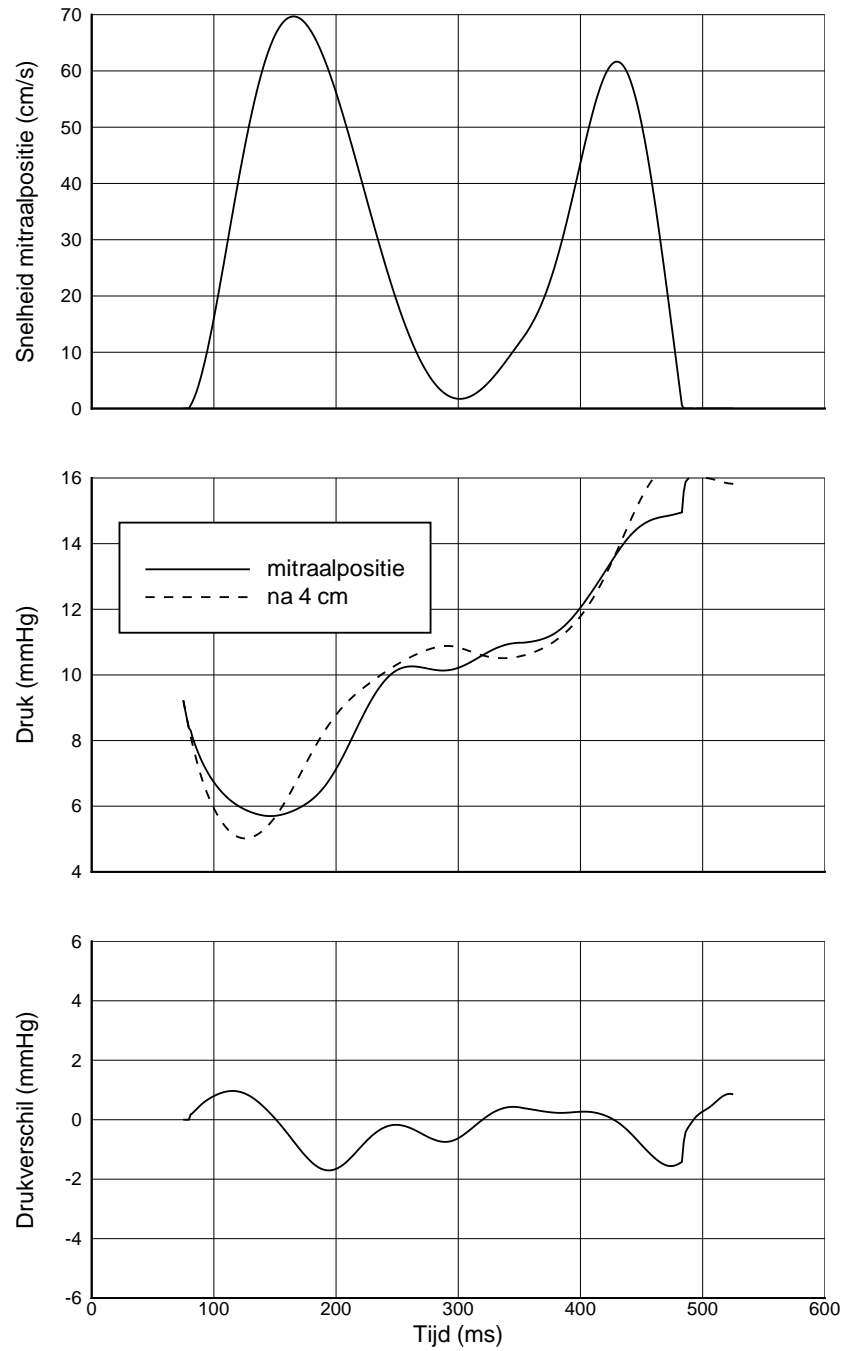
Wanneer geen rekening gehouden wordt met reflecties wordt de voortplantingssnelheid van een golf in een cilindrische buis met elastische wand gegeven door de Moens-Korteweg-vergelijking

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r}}, \quad (9.2)$$

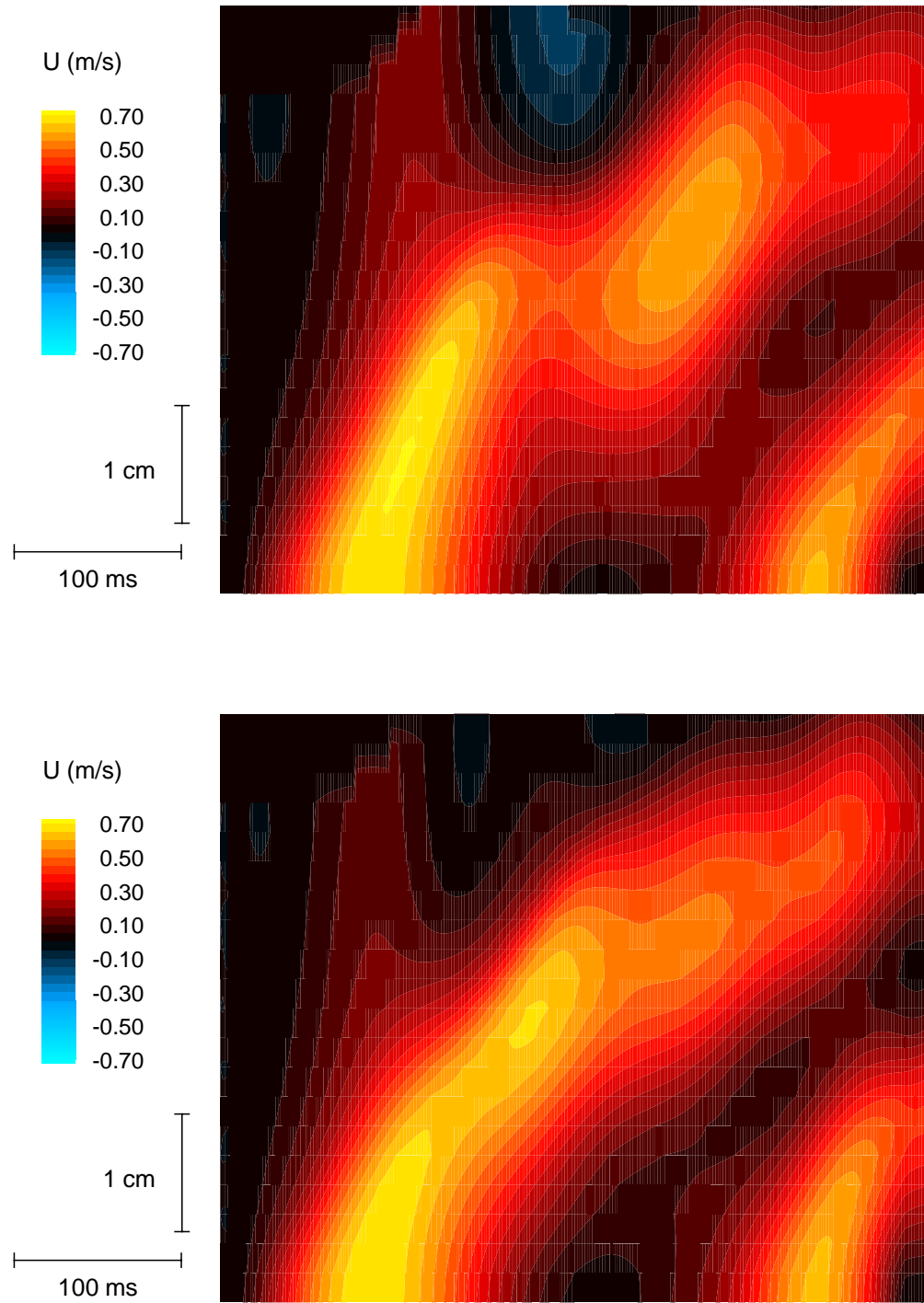
waarbij c de golfvoortplantingssnelheid is, E de elasticiteitsmodulus, r en h respectievelijk de straal en de wanddikte van de buis en ρ de soortelijke massa van het medium in de buis. De golfvoortplantingssnelheid neemt toe met toenemende stijfheid (lagere compliantie).



Figuur 9.28: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met complianter ventrikel : $Eh = Eh_{ref}/2$. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



Figuur 9.29: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met stijver ventrikel: $Eh = Eh_{ref} * 2$. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



Figuur 9.30: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 2D stromingssimulatie. Resultaten bij verschillende complianties. Boven : $Eh = Eh_{ref}/2$. Onder : $Eh = Eh_{ref} * 2$.

Wanneer de linkerhartkamer vergeleken wordt met een cilindrische buis met elastische wand dan kan het enkel met een zeer korte buis zijn waarbij het uiteinde dat overeenstemt met de apex afgesloten is. Wanneer de buis minder compliant wordt, neemt de golfvoortplantingssnelheid toe. De invloed hiervan op het snelheidspatroon in de buis wordt getoond in figuur 9.31. Er kan gezien worden dat bij hoge compliantie (lage Eh waarde) een duidelijke golfbeweging waarneembaar is met nadien optredende reflecties. Naarmate de compliantie afneemt loopt de golf schijnbaar minder ver door en zijn de reflecties na het beëindigen van de golf niet meer waarneembaar (hoge Eh waarde). Men kan dit verschijnsel vergelijken met de golfvoortplanting in een touw. Wanneer het touw relatief slap gehouden wordt en men een golfbeweging maakt aan één uiteinde van het touw terwijl het andere uiteinde stilgehouden wordt, zal de golf doorheen het touw lopen en zal de amplitude van de initiële golf voortpropageren tot wanneer de golf weerkaatst aan het andere uiteinde. Een strakgespannen touw, waar de golfsnelheid veel hoger is, gedraagt zich eerder als een star lichaam. Door een golfbeweging te maken aan één uiteinde zal men het touw zien op en neer bewegen alsof het een staaf is. Men kan dan niet echt een geïsoleerde golfvoortplanting waarnemen. De golflengte is veel groter dan de lengte van het touw.

Men kan dit verschijnsel ook mathematisch afleiden uit de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9.3)$$

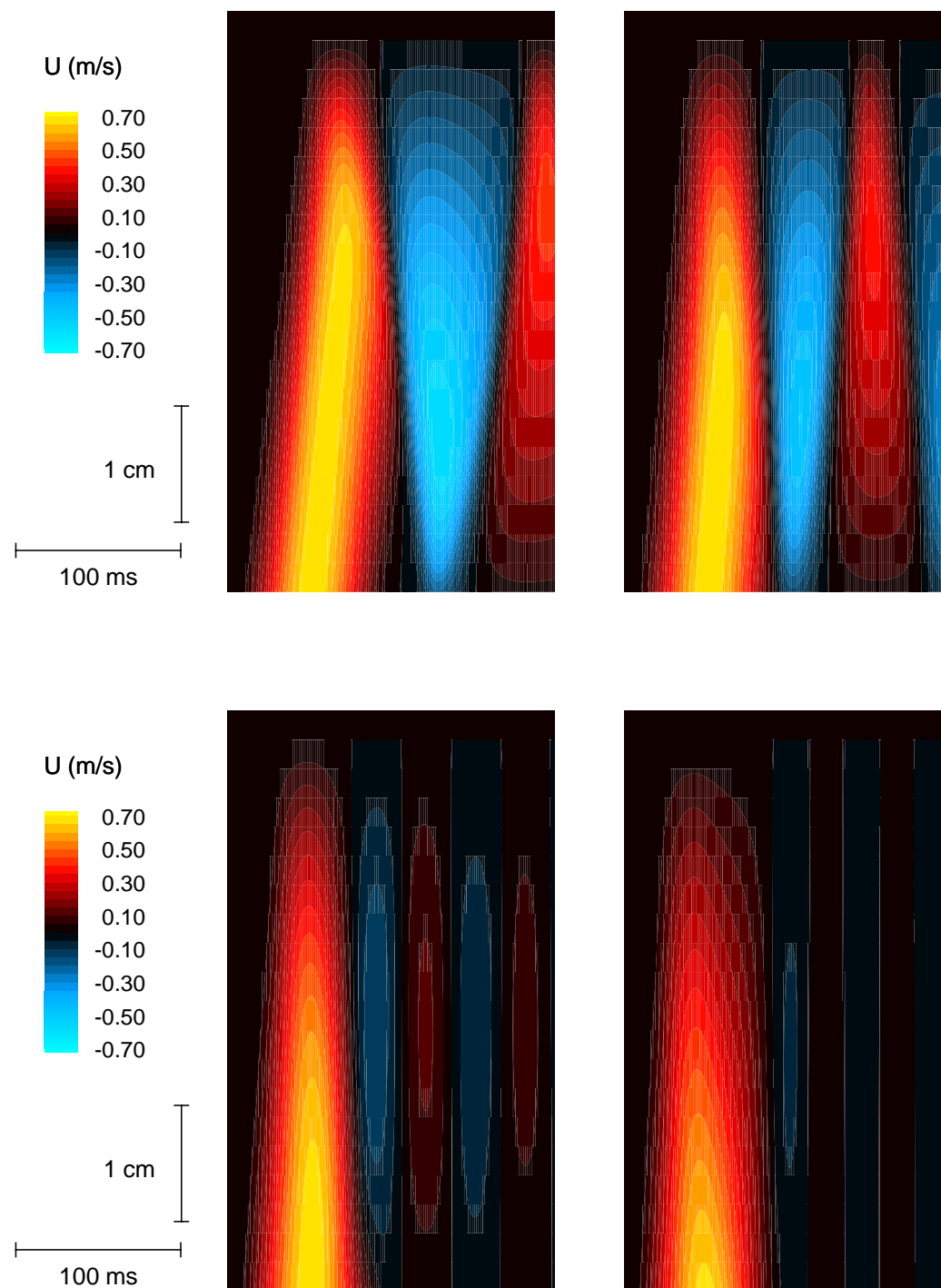
Bij hoge golfvoortplantingssnelheid wordt deze vergelijking vereenvoudigd tot

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (9.4)$$

met als oplossing

$$u(t) = u_0(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad (9.5)$$

waarbij l de lengte van het touw voorstelt en $u_0(t)$ de snelheid die aan het uiteinde van het touw ($x=0$) in functie van de tijd wordt opgelegd. De snelheden en dus ook de verplaatsingen langsheen het touw worden op ieder ogenblik gegeven door een rechte. Dit verklaart waarom het strak gespannen touw recht zal blijven en waarom men in het kleuren M-mode beeld bij lage compliantie (rechtsonder in figuur 9.31) op ieder tijdstip een lineaire afname ziet van de snelheid in de richting van de apex. Wanneer de snelheid aan de inlaat nul wordt, is de snelheid ogenblikkelijk overal nul zodat men geen reflecties meer kan waarnemen.



Figuur 9.31: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 1D stromingssimulatie in een cilindrische buis met elastische wand met gesloten uiteinde. Resultaten bij verschillende complianties. Linksboven: $Eh = 20$ Pa m. Rechtsboven: $Eh = 40$ Pa m. Linksonder: $Eh = 80$ Pa m. Rechtsonder: $Eh = 160$ Pa m.

Een analoog beeld werd gezien bij de ééndimensionale vullingsberekening in de linkerhartkamer (figuur 9.22). Het beeld geeft de schijn dat de golf niet doorloopt tot in de apex.

Samengevat leert deze ééndimensionale analyse ons dat

1. bij hoge complianties reflecties waarneembaar zijn,
2. bij lage complianties de golf schijnbaar minder ver doorloopt,
3. geen fysiologisch golfpatroon kan worden waargenomen bij lage compliantie.

Het is dus zeker nodig om tenminste een tweedimensionaal model te gebruiken om fysiologische kleuren M-mode beelden te verkrijgen. Het grote verschil tussen de ééndimensionale en de tweedimensionale berekening is de mogelijkheid om met de tweedimensionale berekening wervelvorming te simuleren. Deze wervelvorming laat toe om grotere snelheden te hebben op de symmetrie-as zonder dat de gemiddelde snelheid groot hoeft te zijn. Deze kan zelfs negatief zijn wanneer de snelheid op de as positief is. Hierdoor kan een kleuren M-mode beeld berekend met een tweedimensionaal model fundamenteel verschillend zijn van deze bekomen met een ééndimensionaal model.

9.3.2c Besluit

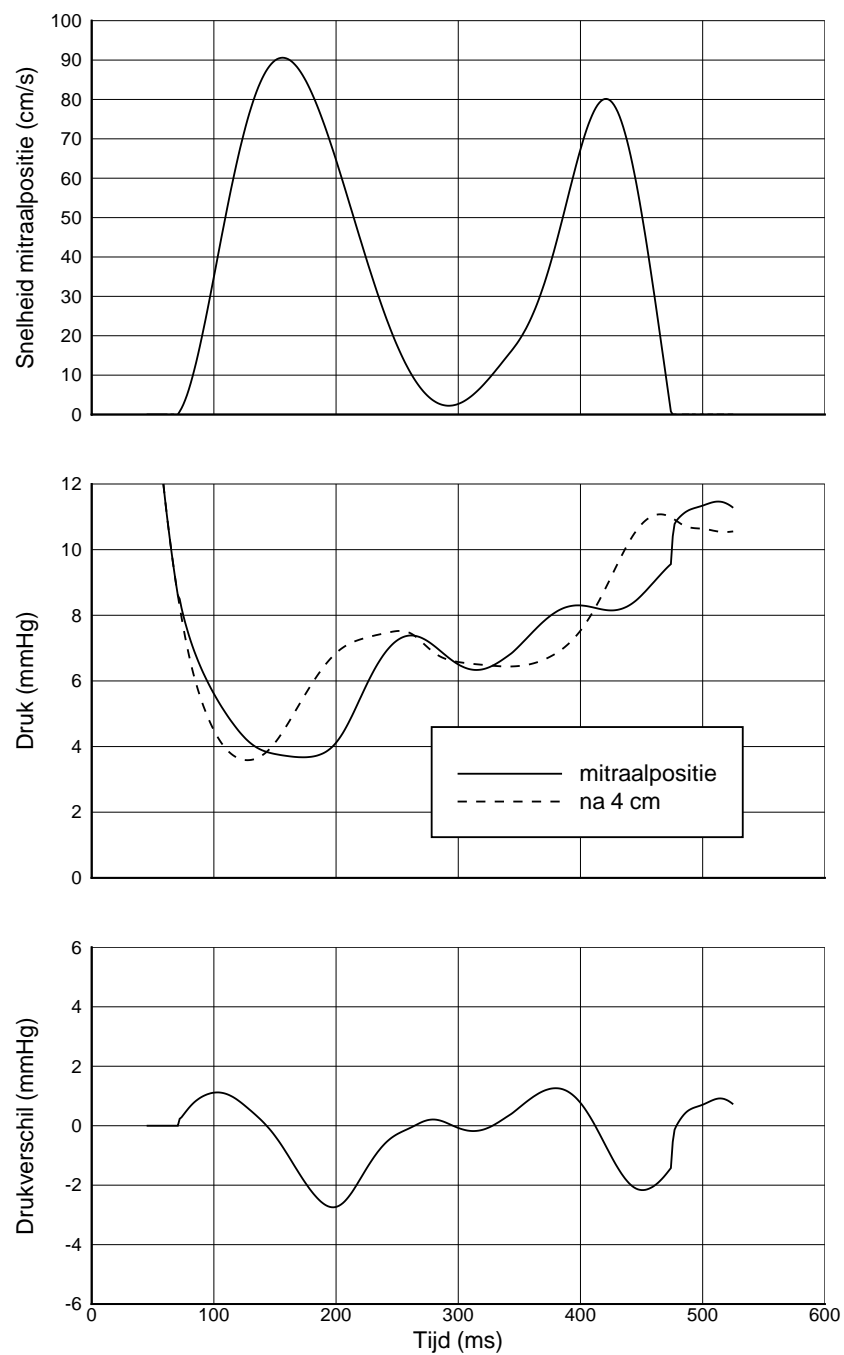
Bij het vergelijken van de figuren 9.28 en 9.29 wordt vastgesteld dat bij de verhoging van de stijfheid van de ventrikelwand (lagere compliantie) een afname wordt waargenomen van de snelheid waarmee de vullingsgolf zich voortplant in de ventrikel. Dit is in schijnbare tegenstelling met de Moens-Korteweg-vergelijking (9.2). Deze vullingsgolf kan dus geen geïsoleerde golf zijn, maar moet bestaan uit de samenstelling van zowel invallende als gereflecteerde golven in de ventrikel. Het is ook enkel op deze wijze dat men het in vivo waargenomen verschijnsel kan verklaren dat de vullingsgolf zich kan voortplanten met een snelheid die kleiner is dan de lokaal optredende convectieve snelheden. Er werd ook getoond dat het met een ééndimensionale simulatie niet mogelijk is om fysiologische kleuren M-mode beelden te berekenen.

9.3.3 Invloed van de amplitude van de vullingsgolven

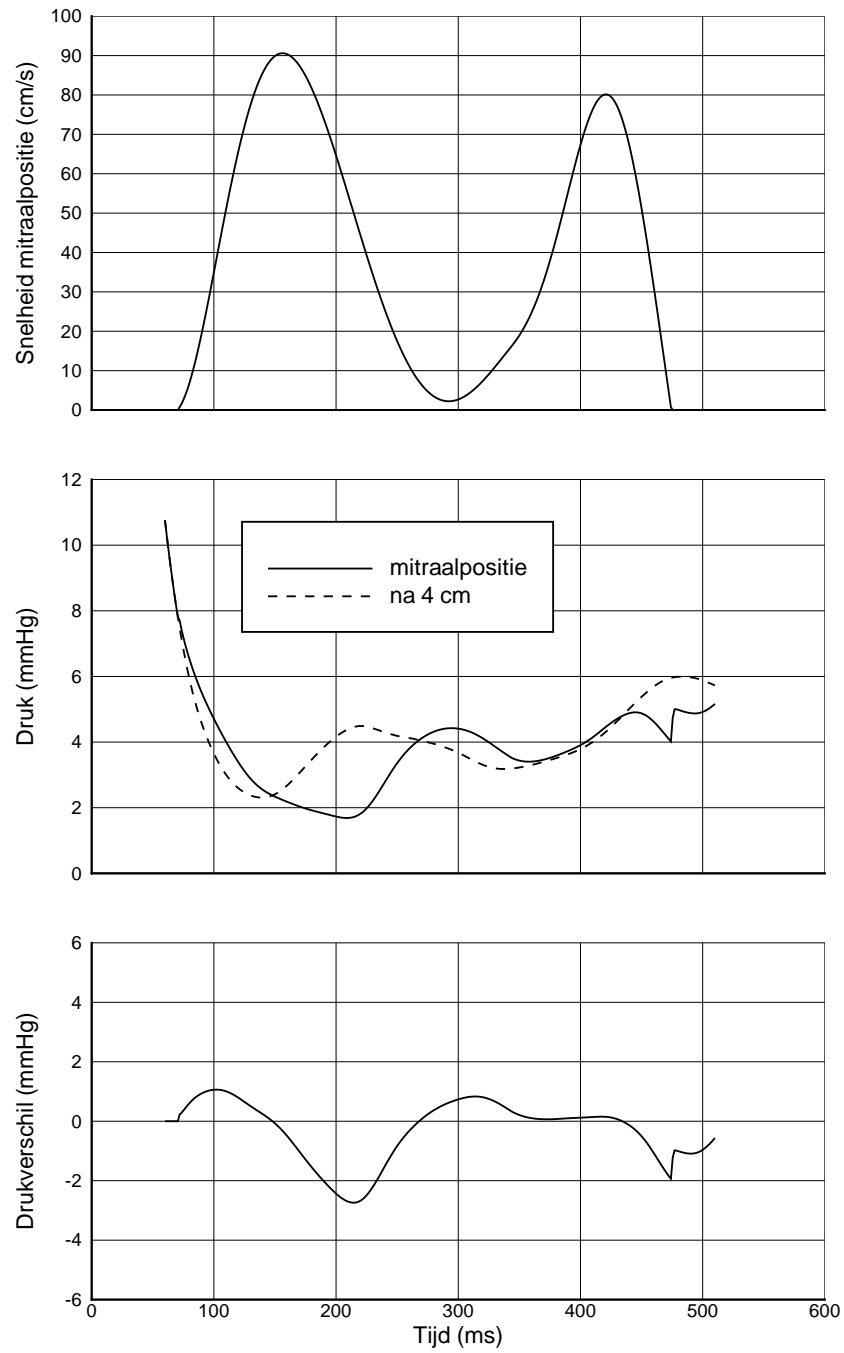
Voor deze berekening worden de amplitude van de vroege en atriale vullingsgolven met 30 % verhoogd. Hierbij wordt de E/A verhouding constant gehouden. Figuren 9.32, 9.33 en 9.34 tonen de intraventriculaire drukverlopen ter hoogte van de basis en de apex voor verschillende complianties. De maximaal optredende drukverschillen zijn hier in alle gevallen duidelijk toegenomen ten opzichte van de referentieberekening. Omgekeerd kan men zeggen dat bij grotere drukverschillen de amplitude van de vullingsgolven toeneemt [129].

Figuur 9.35 toont het berekende kleuren M-mode beeld. De voortplantingssnelheid van de vullingsgolf neemt duidelijk toe ten opzichte van de referentieberekening. Deze positieve correlatie tussen amplitude van de vullingsgolf en voortplantingssnelheid van deze golf wordt ook in de literatuur beschreven [10].

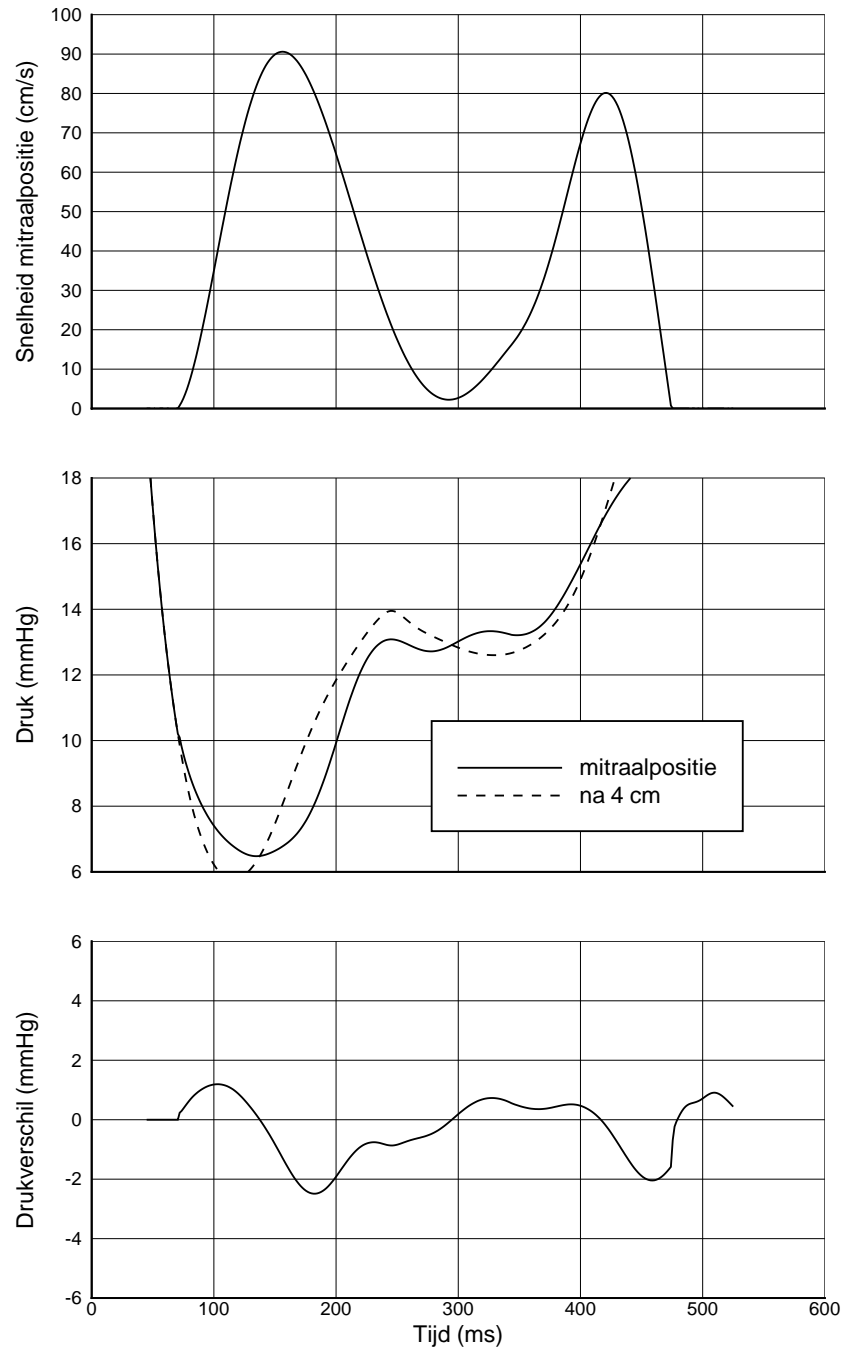
Figuur 9.36 toont de invloed van de compliantie bij deze hogere vullingssnelheden. Hier is nog duidelijker merkbaar dat bij verhoogde stijfheid de golf trager voortbeweegt.



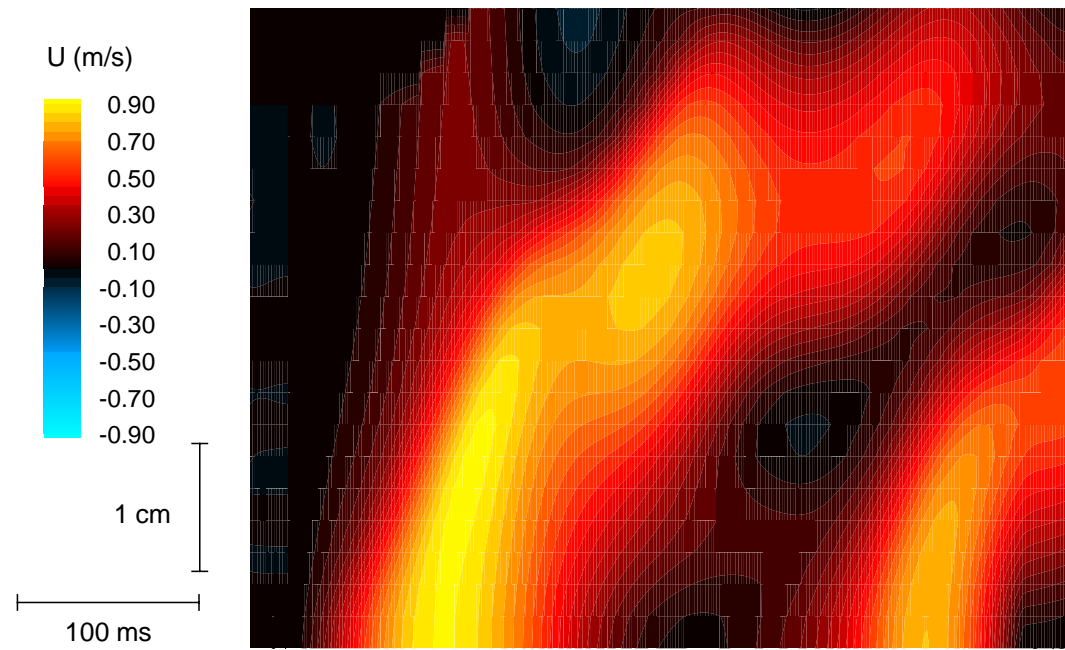
Figuur 9.32: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Referentieberekening met groter vullingsdebiet : $Q = Q_{ref} * 1.3$. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



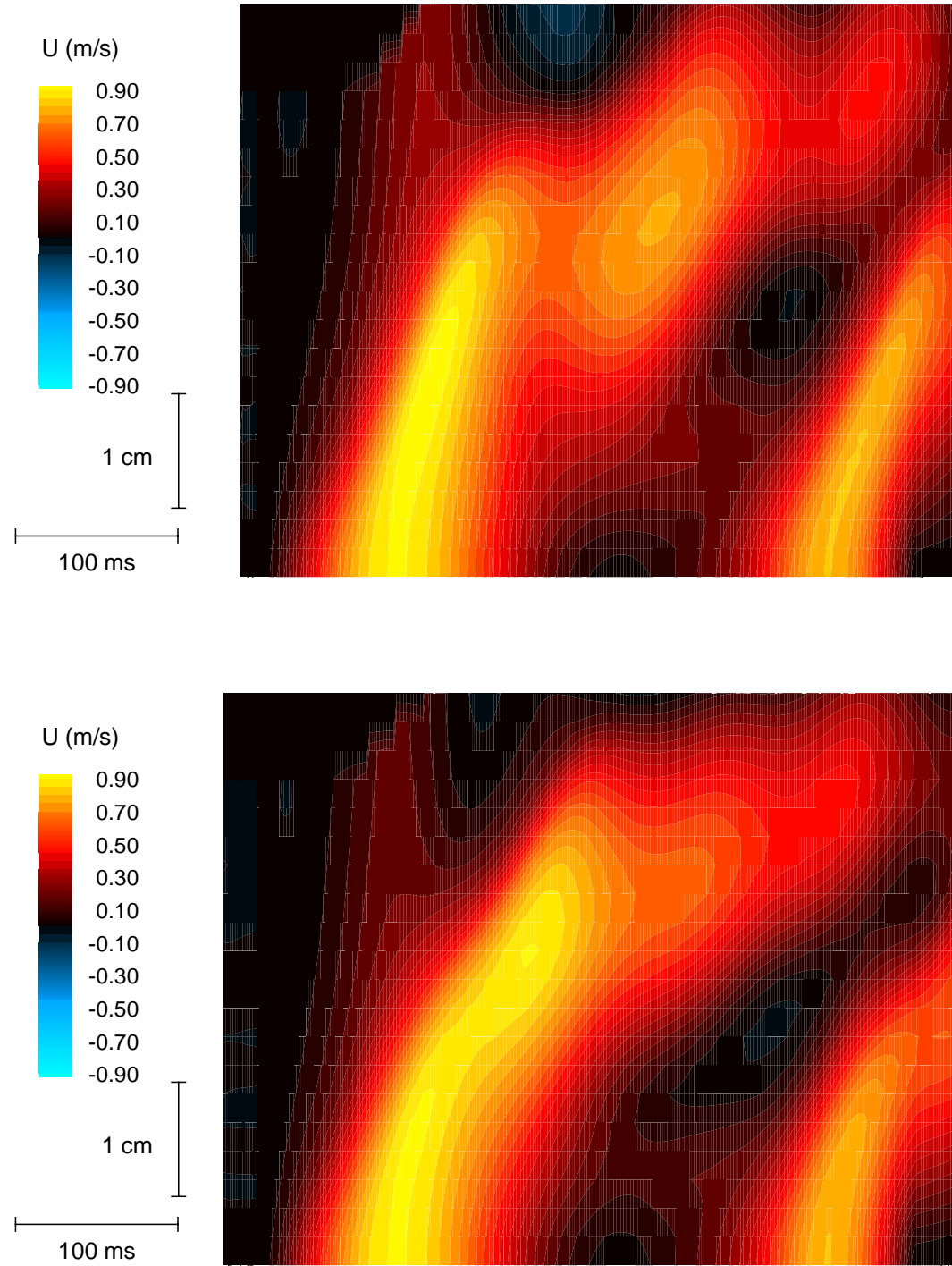
Figuur 9.33: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met groter vullingsdebiet en complianter ventrikel : $Q = Q_{ref} * 1.3$, $Eh = Eh_{ref}/2$. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



Figuur 9.34: Boven : Opgelegd snelheidsprofiel aan de mitraalopening. Midden : Drukverloop uit 2D berekening aan de mitraalpositie en 4 cm in de ventrikel. Berekening met groter vullingsdebiet en stijver ventrikel : $Q = Q_{ref} * 1.3$, $Eh = Eh_{ref} * 2$. Onder : Drukverschil tussen bovenstaande drukken.



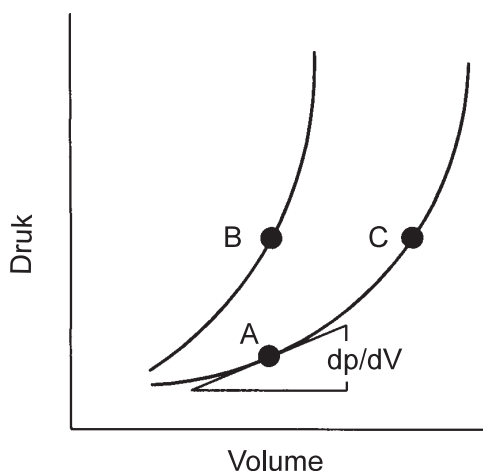
Figuur 9.35: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 2D stromingssimulatie. Berekening met groter vullingsdebiet.



Figuur 9.36: Kleuren M-mode beeld afgeleid uit de 2D stromingssimulatie met groot vullingsdebiet. Resultaten bij verschillende complianties. Boven : $Eh = Eh_{ref}/2$. Onder : $Eh = Eh_{ref} * 2$.

9.3.4 Invloed van de atriale druk

De atriale druk ('preload') kan fysiologisch gezien niet zomaar onafhankelijk van de andere parameters ingesteld worden. Wanneer de atriale druk toeneemt moet de ventriculaire druk ook toenemen indien men hetzelfde stromingspatroon doorheen de mitraalklep wil behouden. Dit kan alleen indien een ander (steiler) druk-volumeverband geldt (B) of indien de vulling bij hogere volumes (C) dient te gebeuren (figuur 9.37). In beide gevallen neemt de compliantie van de ventrikelwand af en mag men een kleinere golfvoortplantingssnelheid verwachten (zie §9.3.2). Een andere invloed van het absolute drukniveau is er niet in het model. In de stromingsvergelijkingen worden enkel drukverschillen gebruikt. Het absolute drukniveau komt enkel tussen in de berekening van de positie van de hartspierwand waar het druk-volume verband van de ventrikel gebruikt wordt.



Figuur 9.37: Verandering van de einddiastolische druk bij diastolische dysfunctie. A : normaal. B : rek-onafhankelijke diastolische dysfunctie. C : rek-afhankelijke diastolische dysfunctie [68].

9.3.5 Discussie en besluit

Uit de parameterstudie blijkt dat de invloed van de relaxatietijdsconstante gering is wanneer deze parameter geïsoleerd wordt gewijzigd. De invloed van de compliantie springt echter wel in het oog. Bij toenemende compliantie is de voortplantingssnelheid van de vullingsgolf doorheen de ventrikel groter. De voortplantingssnelheid is echter kleiner dan de in de golf optredende snelheden. Deze laatste twee fenomenen lijken op het eerste gezicht niet fysisch. De vullingsgolf is echter geen geïsoleerde golf, maar moet gezien worden als de samenstelling van vele golven, waaronder zich gereflecteerde golven bevinden. Al deze golven bewegen zich veel sneller voort dan de resulterende golf. Dit verschijnsel, waarbij de wervelvorming ook een belangrijke rol blijkt te spelen is zeer complex en kan niet zomaar aan de hand van een ééndimensionale modelvergelijking begrepen of gesimuleerd worden. Dit benadrukt de onderzoekswaarde van het tweedimensionale axisymmetrische model.

In de literatuur [10] wordt een positieve correlatie beschreven tussen de amplitude van de vullingsgolf en de voortplantingssnelheid. Deze wordt gereproduceerd in de parameterstudie.

Er wordt echter ook in de literatuur een negatieve correlatie van de tijdsconstante van de relaxatie met de golfvoortplantingssnelheid beschreven [10, 120, 124]. Deze invloed wordt in de parameterstudie niet gereproduceerd. De toename van de relaxatietijdsconstante wordt in de literatuur waargenomen bij diastolische dysfunctie of bij kunstmatig geïnduceerde acute ischemie. In deze gevallen wordt echter niet alleen de tijdsconstante van de relaxatie verhoogd, maar neemt ook de compliantie van de ventrikelwand af zodat de vullingsdruk toeneemt. Bij verlaagde compliantie wordt in de parameterstudie wel een sterke beïnvloeding van de golfvoortplantingssnelheid gezien. De golfvoortplantingssnelheid neemt dan af.

Deze bevindingen suggereren dat het waarnemen van de negatieve correlatie tussen de tijdsconstante van de relaxatie met de golfvoortplantingssnelheid mogelijks enkel optreedt als er ook een negatieve correlatie bestaat tussen de tijdsconstante van de relaxatie en de compliantie van de ventrikel. Er mogen echter geen voorbarige conclusies getrokken worden uit de eerder beknopte parameterstudie. Verder onderzoek is op dit vlak zeker nodig.

Hoofdstuk 10

Besluit en aanbevelingen

In dit werk wordt een numeriek model ontwikkeld met als doel de stroming tijdens de vulling van de linkerhartkamer te bestuderen. De wederzijdse beïnvloeding van de verplaatsing van de hartspierwand en de bloedstroming in de hartkamer wordt in rekening gebracht. Het model wordt gevalideerd aan de hand van de golfvoortplanting in een cilindrische buis met elastische wand. De berekende golfvoortplantingssnelheid komt zeer goed overeen met de voor dit geval analytische gekende golfvoortplantingssnelheid.

Er wordt ook een nieuwe discretisatiemethode ontwikkeld om de stroming te berekenen van een incompressibel medium. Deze discretisatiemethode wordt zodanig ontworpen dat de convergentie van de methode onafhankelijk is van de rooster-aspect-verhouding. De methode kon op een eenvoudige wijze worden uitgebreid om ook compressibele stromingen met laag Mach-getal te simuleren.

De klinische toepassing van het model is het bestuderen van de vullingsfase van het linkerhart zowel vanuit niet-invasief als vanuit invasief oogpunt. Het model berekent immers zowel de snelheids- als de drukdistributie in functie van de tijd. In dit werk wordt vooral aandacht besteed aan de niet-invasieve toepassingen.

Niet-invasief onderzoek naar stromingspatronen gebeurt in de dagelijkse klinische praktijk met Dopplerechocardiografie. 2D Doppler beelden geven een beeld van de stroming in de linkerhartkamer. Op dit ogenblik laat de frequentie waarmee de 2D beelden worden gemeten nog geen kwantitatieve bepaling toe van de variatie van de snelheden in de tijd. Enkel de gepulste Dopplertechniek en de kleuren M-mode techniek hebben een voldoende resolutie in de tijd om, uitgaande van het snelheidsveld, de versnellingen en de daarbij gepaard gaande drukverschillen te berekenen.

Om het numeriek model nuttig te maken voor de medische wereld werd gekozen om de resultaten van de berekeningen niet alleen op ingenieurswijze voor te stellen, zoals bijvoorbeeld aan de hand van snelheidsvectoren, maar ook aan de hand van de bovengenoemde 2D Doppler beelden en de kleuren M-mode beelden. Dit laat de clinicus onmiddellijk toe om in zijn vertrouwde omgeving de berekeningsresultaten te interpreteren.

Bovendien is het numerieke model uitermate geschikt om de invloed van de wijziging van fysiologische parameters van de linkerventrikel te bestuderen. In dit werk wordt de invloed van de tijdsconstante van de isovolumetrische relaxatie, de invloed van de compliantie van de ventrikelwand en de invloed van de amplitude van het snelheidsprofiel ter hoogte van de mitraalklep onderzocht.

Het meest opvallende resultaat van deze parameterstudie is dat bij de verhoging van de stijfheid van de ventrikelwand (lagere compliantie) een afname wordt waargenomen van de snelheid waarmee de vullingsgolf zich voortplant in de ventrikel (kleuren M-mode beeld). Hieruit kan worden geargumenteed dat deze vullingsgolf geen geïsoleerde golf is, maar eigenlijk moet bestaan uit de samenstelling van zowel invallende als gereflecteerde golven in de ventrikel. Het is ook enkel op deze wijze dat men het in vivo waargenomen verschijnsel kan verklaren dat de vullingsgolf zich meestal voortplant met een snelheid die kleiner is dan de lokaal optredende convectieve snelheden. Er wordt ook aangetoond dat het met een ééndimensionale simulatie niet mogelijk is om fysiologische kleuren M-mode beelden te berekenen.

Met het numerieke model worden ook intraventriculaire drukgradiënten bestudeerd. De drukverlopen die in de literatuur worden beschreven, worden gereproduceerd. De verklaring van Courtois dat elastische 'recoil' van de ventrikelwand aan de oorsprong ligt van de intraventriculaire drukgradiënten kan worden weerlegd. Ook wanneer er geen 'recoil' aanwezig is, worden deze drukgradiënten berekend. Er kan worden aangetoond dat de interactie van de relaxatie van de ventrikelwand, de compliantie van de ventrikel en de drukgolfvoortplanting in de ventrikel aan de basis liggen van de intraventriculaire drukgradiënten.

In het huidige numerieke model wordt het stromingspatroon ter hoogte van de mitraalklep opgelegd. Het vlak waarin de mitraalklep zich bevindt wordt ook vastgehouden in de tijd. In vivo kan men echter waarnemen dat dit vlak een beweging in de richting van het atrium ondergaat bij de vulling van de hartkamer. Door deze beweging wordt de golfreflectie ter hoogte van de mitraalklep zeker beïnvloed, en bijgevolg ook het snelheidspatroon, de 2D Doppler beelden en het kleuren M-mode beeld. Daarom dient één van de eerstvolgende stappen in de uitbreiding van het model te bestaan uit het toevoegen van een atrium. De stroming doorheen de mitraalklep kan dan niet meer worden opgelegd maar zal een resultaat zijn van de wisselwerking tussen de atriale en ventriculaire relaxatie en compliantie.

De invloed van de mitraalklep op de stroming tijdens de vullingsfase dient ook verder te worden onderzocht. In dit werk werd immers aangenomen dat deze invloed klein is en dat de klep dus passief meebeweegt met de stroming.

Ook het model voor de hartspierwand kan worden uitgebreid. Hierbij kan in de eerste plaats een uitbreiding gebeuren in de zin van een niet-homogene relaxatie. Ook de invloed van lokaal compliantere of stijvere delen in de hartspierwand kan worden onderzocht. De invloed van de massa van de hartspierwand is ook een belangrijke parameter die in de toekomst dient te worden onderzocht.

Verder dient ook nog onderzoek te worden verricht naar betere koppelingsmethodes tussen de verschillende deelproblemen. Eén van de mogelijke verbeteringen kan er in bestaan om de koppeling drukgestuurd te maken in plaats van verplaatsingsgestuurd. Het probleem dat de positie van de wand bepaalt, dient dan bijvoorbeeld uitgaande van de voorgeschreven normale verplaatsingscomponent de drukverdeling en de tangentiale verplaatsingscomponent te berekenen. Deze berekende drukverdeling en tangentiale verplaatsingscomponent kan dan als invoer worden gebruikt voor het stromingsprobleem. Het stromingsprobleem moet dan een beter benaderde waarde geven voor de normale snelheidscomponent zodat de cyclus kan herhaald worden tot er convergentie wordt bereikt.

De opbouw van het programma laat toe om heel eenvoudig een volledig nieuw model voor één van de deelproblemen te implementeren. Zo is het bijvoorbeeld mogelijk om een meerdimensionaal model voor de hartspierwand te implementeren. Hiervoor kan dan eventueel gebruik worden gemaakt van bestaande commercieel beschikbare software die de structuurberekening op zich neemt en als resultaat de verplaatsing van de hartspierwand oplevert.

In de toekomst mag men verwachten dat ook de commerciële CFD-stromingspakketten in staat zullen zijn om berekeningen op willekeurig beweegbare roosters uit te voeren, zodat dan ook het stromingsprobleem in drie dimensies zal kunnen worden opgelost.

Deze toekomstperspectieven op algoritmisch vlak en de verwachte vooruitgang op het gebied van klinische beeldvorming tonen aan dat er nog een brede weg openligt voor verder onderzoek in deze richting. In de toekomst zullen er steeds meer kwantitatieve gegevens beschikbaar komen in de klinische praktijk, zodat de waarde van numerieke modellen in de toekomst nog zal toenemen om al deze gegevens te helpen interpreteren en analyseren.

Appendix A

Discretisatie van de viskeuze fluxen op een niet-gestructureerd rooster

Figuur A.1 toont het gebruikte controlevolume. Het wordt gevormd door de zwaartepunten van de omringende driehoeken te verbinden met de middens van de omringende zijden. Als voorbeeld wordt de viskeuze flux in de x-impulsvergelijking berekend. Deze wordt gegeven door de uitdrukking

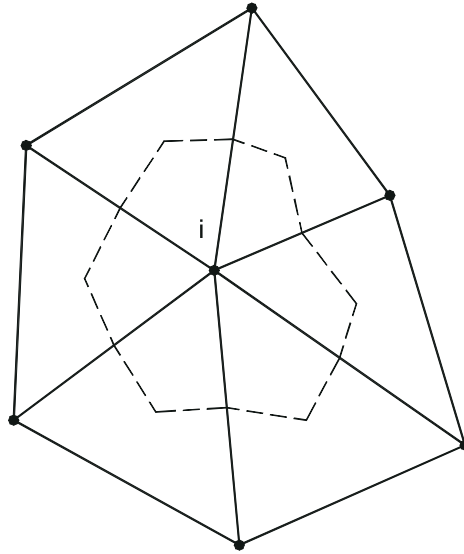
$$\nu \int_S (\nabla u) \cdot \underline{n} dS, \quad (\text{A.1})$$

waarbij \underline{n} de uitwendige normale is langsheen de rand van het controlevolume.

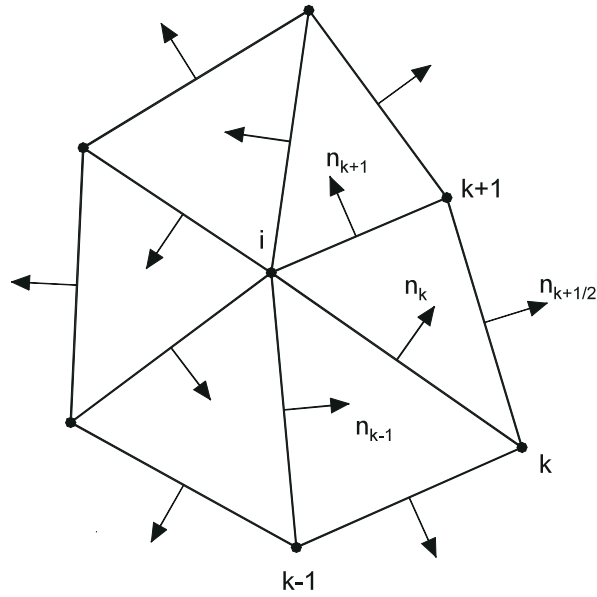
Als verondersteld wordt dat het toestandsverloop lineair is in een driehoek en stuksgewijze lineair over het veld dan kan de integraal herschreven worden als

$$\sum_k^{\text{driehoeken}} (\nabla u)_{D_{k+1/2}} \cdot \frac{\underline{n}_{k+1/2}}{2}, \quad (\text{A.2})$$

waarbij de som genomen wordt over de aanliggende driehoeken van knoop i . Hierbij werd gebruik gemaakt van het feit dat voor een lineair toestandsverloop ∇u constant is binnen elke driehoek, zodat de integraal per driehoek onafhankelijk is van het gevolgde integratiepad. Het is wel essentieel dat het integratiepad door de middens van de omringende zijden loopt. Voor de betekenis van $\underline{n}_{k+1/2}$ wordt verwezen naar figuur A.2. De normale van een zijde is hier gedefinieerd met een lengte gelijk aan die van de zijde.



Figuur A.1: Controlevolume rond knoop i gevormd door de zwaartepunten van de omringende driehoeken te verbinden met de middens van de omringende zijden.



Figuur A.2: Definitie van de normalen.

De gradiënt in een driehoek $D_{k+1/2}$ voor een lineair variërende toestand wordt gegeven door

$$(\nabla u)_{D_{k+1/2}} = \frac{-1}{2A_{k+1/2}} \left(u_i \underline{n}_{k+1/2} + u_k \underline{n}_{k+1} - u_{k+1} \underline{n}_k \right), \quad (\text{A.3})$$

waarbij $A_{k+1/2}$ de oppervlakte van driehoek $D_{k+1/2}$ voorstelt. De som over de driehoeken kan dan herverdeeld worden naar de som over de omringende zijden van knoop i zodat

$$\nu \int_S (\nabla u) \cdot \underline{n} dS = \sum_k^{\text{zijden}} w_k (u_k - u_i), \quad (\text{A.4})$$

met

$$w_k = -\frac{\nu}{4} \left(\frac{\underline{n}_{k+1/2} \cdot \underline{n}_{k+1}}{A_{k+1/2}} - \frac{\underline{n}_{k-1/2} \cdot \underline{n}_{k-1}}{A_{k-1/2}} \right). \quad (\text{A.5})$$

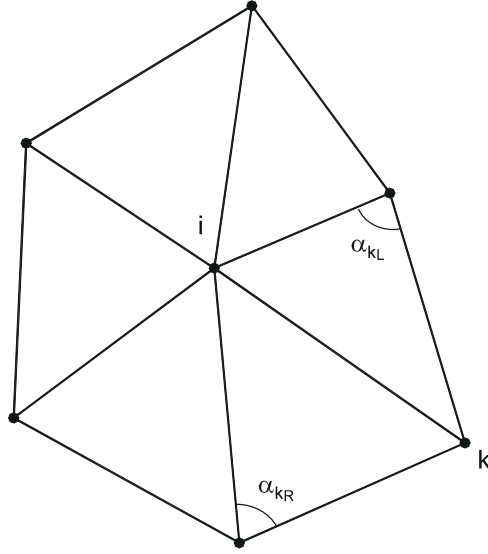
De oppervlakte van een driehoek kan uitgedrukt worden als de grootte van het vectorproduct van de geschaalde normalen :

$$\begin{aligned} A_{k+1/2} &= \frac{1}{2} \left| \underline{n}_{k+1/2} \times \underline{n}_{k+1} \right|, \\ A_{k-1/2} &= \frac{1}{2} \left| \underline{n}_{k-1/2} \times \underline{n}_{k-1} \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

zodat

$$w_k = -\frac{\nu}{2} \left(\frac{\underline{n}_{k+1/2} \cdot \underline{n}_{k+1}}{\left| \underline{n}_{k+1/2} \times \underline{n}_{k+1} \right|} - \frac{\underline{n}_{k-1/2} \cdot \underline{n}_{k-1}}{\left| \underline{n}_{k-1/2} \times \underline{n}_{k-1} \right|} \right). \quad (\text{A.7})$$

Tenslotte kunnen de scalaire en vectorproducten uitgedrukt worden in functie van de locale hoeken, zoals getoond wordt op figuur A.3 :



Figuur A.3: Definitie van de hoeken α_{L_k} en α_{R_k} .

$$\frac{\underline{n}_{k+1/2} \cdot \underline{n}_{k+1}}{|\underline{n}_{k+1/2} \times \underline{n}_{k+1}|} = -\frac{\cos(\alpha_{L_k})}{\sin(\alpha_{L_k})} = -\cotan(\alpha_{L_k}), \quad (\text{A.8})$$

$$-\frac{\underline{n}_{k-1/2} \cdot \underline{n}_{k-1}}{|\underline{n}_{k-1/2} \times \underline{n}_{k-1}|} = -\frac{\cos(\alpha_{R_k})}{\sin(\alpha_{R_k})} = -\cotan(\alpha_{R_k}). \quad (\text{A.9})$$

Met gebruik van deze formules kan een eenvoudige vorm voor de wegingsfactoren w_k bekomen worden als

$$w_k = \frac{\nu}{2} [\cotan(\alpha_{L_k}) + \cotan(\alpha_{R_k})]. \quad (\text{A.10})$$

De coëfficiënten w_k zijn voor een Delaunay triangulatie altijd positief [1]. Rekt men evenwel het rooster uit in een bepaalde richting, en ontstaan hierdoor stompe hoeken, dan wordt de cotan-functie negatief wat kan leiden tot negatieve w_k .

Er moet opgemerkt worden dat vergelijking (A.4) exact is voor een stuksgewijze lineaire oplossing. Dezelfde betrekking wordt natuurlijk teruggevonden met een Galerkin gewogen eindige elementen methode met lineaire elementen [1].

Appendix B

Beschrijving van de rand

De beschrijving van de rand werd uitvoerig behandeld in §7.5.2. In dit deel wordt uitgelegd hoe een kubische Hermite spline wordt geconstrueerd doorheen een gegeven verzameling controlepunten. Deze spline heeft als voornaamste eigenschap zeer weinig oscillaties te vertonen in vergelijking met de meer gebruikte kubische B-spline [5].

Een kubische B-spline heeft dan weer als eigenschap dat eerste en tweede afgeleiden continu zijn (C^2 continuïteit). De bepaling van de interpolerende veelterm tussen twee controlepunten is afhankelijk van alle punten uit de gegeven verzameling, aangezien de coëfficiënten van de interpolerende veelterm als oplossing gevonden worden van een tridiagonaal stelsel.

De kubische Hermite spline die hier wordt bekomen is enkel G^1 continu. Dit betekent dat de genormaliseerde raakvector continu varieert in functie van de positie op het curvesegment. Hierbij dient opgemerkt te worden dat G^1 -continuïteit zwakker is dan C^1 -continuïteit. In CFD is het meestal niet nodig - en dus ook niet wenselijk - van meer differentieerbaarheid te hebben dan G^1 continuïteit [5]. Zoals verder getoond wordt, zijn de coëfficiënten van de interpolerende veelterm voor de kubische Hermite spline enkel afhankelijk van de lokale controlepunten. Deze lokale afhankelijkheid bevordert de monotoniciteit van de interpolerende spline.

B.1 Interpolerende veelterm tussen twee controlepunten

Beschouw het interval tussen twee controlepunt-vectoren \underline{P}_i en \underline{P}_{i+1} . De voorstelling van de rand tussen deze twee controlepunt-vectoren gebeurt met de parametrische vectorfunctie $\underline{H}_i(u)$

$$\underline{H}_i(u) = \underline{P}_i f_{00}(u) + \underline{P}_{v_i} f_{01}(u) + \underline{P}_{i+1} f_{10}(u) + \underline{P}_{v_{i+1}} f_{11}(u), \quad (\text{B.1})$$

waarbij u over het eenheidsinterval loopt,

$$u \in [0, 1] \quad (\text{B.2})$$

en $\underline{H}_i(u)$ beweegt over het curvesegment in het interval begrepen tussen de twee controlepunt-vectoren \underline{P}_i en \underline{P}_{i+1} . De functies

$$f_{00}(u), f_{10}(u), f_{01}(u) \text{ en } f_{11}(u) \quad (\text{B.3})$$

worden de kubisch Hermite basisfuncties genoemd en worden gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f_{00}(u) &= 1 - 3u^2 + 2u^3 \\ f_{10}(u) &= 3u^2 - 2u^3 \\ f_{01}(u) &= u - 2u^2 + u^3 \\ f_{11}(u) &= -u^2 + u^3. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ze voldoen aan de relaties gespecificeerd in de tabel B.1

	$f_{00}(u)$	$f'_{00}(u)$	$f_{10}(u)$	$f'_{10}(u)$	$f_{01}(u)$	$f'_{01}(u)$	$f_{11}(u)$	$f'_{11}(u)$
$u=0$	1	0	0	0	0	1	0	0
$u=1$	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabel B.1: Eigenschappen van kubisch Hermite spline functies.

De vectoren \underline{P}_{v_i} zijn de richtingsvectoren rakend aan het curven in de controlepunten.

B.2 Bepaling van de interpolerende spline

Veronderstel dat een curvesegment bestaat uit een aaneensluiting van N_E intervallen $[P_i, P_{i+1}]$ die G^1 -continu aansluiten ter hoogte van de controlepunten. Er bestaan verschillende splines die aan deze eis voldoen, maar een spline die zeer weinig oscillatorisch is, wordt geconstrueerd met de parametrische vectorfuncties $\underline{H}_i(u)$ gedefinieerd in de vorige paragraaf en met de richtingsvectoren \underline{P}_{v_i} als volgt.

Met

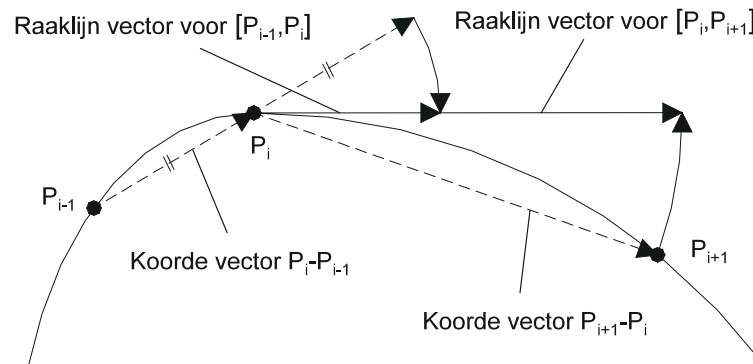
$$\underline{S}_{i+1/2} = \underline{P}_{i+1} - \underline{P}_i, \quad (\text{B.5})$$

de koorde vector tussen twee opeenvolgende controlepunten \underline{P}_i en \underline{P}_{i+1} , worden de richtingsvectoren \underline{T}_{v_i} op één van de volgende drie manieren bepaald.

Voor elk inwendig controlepunt \underline{P}_i wordt de richtingsvector \underline{T}_{v_i} gedefinieerd door

$$\underline{T}_{v_i} = \frac{\|\underline{S}_{i+1/2}\| \underline{S}_{i+1/2} + \|\underline{S}_{i-1/2}\| \underline{S}_{i-1/2}}{\|\underline{S}_{i+1/2}\| + \|\underline{S}_{i-1/2}\|} \text{ als } i \in [3, N_E - 2]. \quad (\text{B.6})$$

Dit is een niet-lineair gewogen gemiddelde van de twee koorde vectoren horende bij het controlepunt \underline{P}_i (zie figuur B.1). Deze gemiddelde richtingsvector \underline{T}_{v_i} neigt naar de richting van de langste koordevector. Vergelijking (B.6) gebruikt enkel informatie van drie naburige controlepunten, wat het minimum is om een bruikbare schatting te hebben voor de richting van de rakende vector aan het curvesegment.



Figuur B.1: Definitie van de raaklijnvectoren voor knoop P_i .

Voor de twee inwendige controlepunten aan de uiteinden van het curvesegment, wordt de richtingsvector \underline{P}_i gedefinieerd door een ander niet-lineair gemiddelde

$$\underline{T}_{v_i} = \frac{\|\underline{S}_{i-1/2}\|}{\|\underline{S}_{i+1/2}\|} \underline{S}_{i+1/2} + \frac{\|\underline{S}_{i+1/2}\|}{\|\underline{S}_{i-1/2}\|} \underline{S}_{i-1/2} \text{ als } i = 2 \text{ of } i = N_E - 1. \quad (\text{B.7})$$

De weging neigt nu sterk naar de korste van de twee koordevectoren, wat nodig is voor een goede controle van de richting van de rakende vector aan begin- en eindpunt van het curvesegment, wanneer daar twee controlepunten dicht bij elkaar liggen.

Voor de twee controlepunten aan de rand van het curvesegment wordt \underline{T}_{v_i} gedefinieerd door een extrapolatieformule als de genormaliseerde richtingsvector niet gegeven is :

$$\begin{aligned} i = 1 & : \underline{T}_{v_1} = 2\underline{S}_{i+1/2} - \|\underline{S}_{i+1/2}\| \underline{t}_{v_2}, \\ i = N_E & : \underline{T}_{v_{N_E}} = 2\underline{S}_{i-1/2} - \|\underline{S}_{i-1/2}\| \underline{t}_{v_{N_E-1}}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Hierin zijn \underline{t}_{v_i} de genormaliseerde richtingsvectoren rakend aan het curvesegment in de controlepunten \underline{P}_i gegeven door

$$\underline{t}_{v_i} = \frac{\underline{T}_{v_i}}{\|\underline{T}_{v_i}\|}. \quad (\text{B.9})$$

Voor het interval $[\underline{P}_i, \underline{P}_{i+1}]$ kunnen de twee richtingsvectoren rakend aan het curvesegment in de controlepunten \underline{P}_i en \underline{P}_{i+1} gedefinieerd worden als

$$\begin{aligned} \underline{P}_{v_i} &= \underline{t}_{v_i} \|\underline{S}_{i+1/2}\|, \\ \underline{P}_{v_{i+1}} &= \underline{t}_{v_{i+1}} \|\underline{S}_{i+1/2}\|. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Er kan opgemerkt worden dat voor het interval $[\underline{P}_i, \underline{P}_{i+1}]$ de raaklijnvectoren aan de beide controlepunten dezelfde lengte hebben als de koordevector $\underline{S}_{i+1/2}$ (zie figuur B.1) en dat de raaklijnvector \underline{P}_{v_i} tweewaardig is in elk intern controlepunt (zie figuur B.1)

$$\begin{aligned} \underline{P}_{v_i} &= \underline{t}_{v_i} \|\underline{S}_{i+1/2}\| \text{ voor het interval } [\underline{P}_i, \underline{P}_{i+1}], \\ \underline{P}_{v_i} &= \underline{t}_{v_i} \|\underline{S}_{i-1/2}\| \text{ voor het interval } [\underline{P}_{i-1}, \underline{P}_i]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Daardoor zijn de richtingen van deze twee raaklijnvectoren dezelfde, maar hun amplitudes komen overeen met de lengte van de koordevectoren vertrekkende uit controlepunt \underline{P}_i en zijn dus in het algemeen geval verschillend. Hierdoor wordt echter wel voldaan aan de G^1 -continuïteitsvereiste.

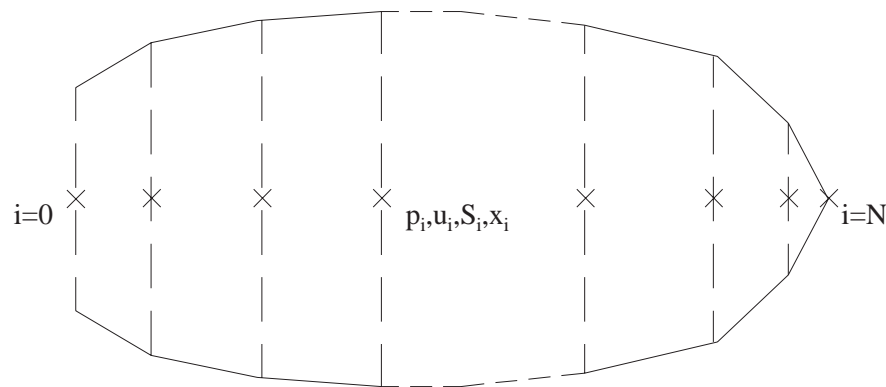
Wanneer aan één van de twee uiteinden van het curvesegment een genormaliseerde raaklijnvector gegeven is, dan kan de eenheidsvector \underline{t}_{v_1} of $\underline{t}_{v_{N_E}}$ gebruikt worden aan het corresponderende controlepunt in plaats van vergelijking (B.8). Verder dient dan vergelijking (B.7) vervangen te worden door vergelijking (B.6), omdat er geen noodzaak is om de richting van de raaklijnvector te controleren aan de uiteinden door twee dicht bij elkaar liggende controlepunten te gebruiken, zodat er ook geen nood is aan de speciale vergelijking (B.7). Hierdoor zijn de raaklijnvectoren bepaald en is de interpolerende spline voor het curvesegment gedefinieerd.

Appendix C

Eéndimensionaal model voor de stroming in de linkerhartkamer

C.1 Opbouw van het model

Er werd een model ontwikkeld met 4 onbekenden per knoop : druk (p), snelheid (u), sectie (S) en positie (x). De letters tussen de haakjes wijzen op de symbolen die zullen gebruikt worden in de formules. De linkerkant van het model stelt de mitraalklep voor. De rechterkant stelt de apex voor. Deze is gesloten zodat de stroming er tot stilstand komt. De knopen worden aangeduid met een kruisje (X). De index i wordt gebruikt voor de nummering van de knopen (figuur C.1).



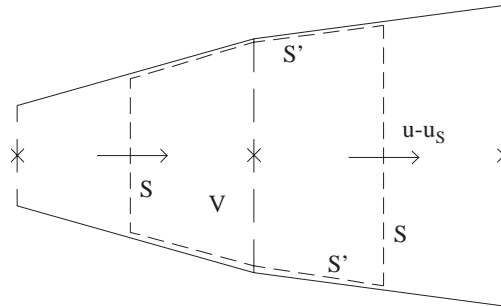
Figuur C.1: Numeriek model voor de linkerventrikel.

De positie van de mitraalklep ligt vast. De positie van de andere knopen kan evolueren in de tijd. Wanneer dit niet zo zou zijn, zou de apex een vast punt zijn. Deze situatie zou kunnen optreden wanneer de apex onderhevig is aan een reactiekracht. Dit kan vergeleken worden met het opblazen van een ballon, waarbij het uiteinde niet kan bewegen doordat een reactiekracht wordt uitgeoefend met b.v. de vinger. In dit model is de apex beweegbaar om geen niet-fysiologische reactiekracht te moeten invoeren.

Wanneer de toestand op een tijdstip t gekend is (p, u, S en x zijn dan gekend in alle knopen), kan de toestand op een volgend tijdstip $t + \Delta t$ berekend worden, rekening houdend met de wetten die de bloedstroming beschrijven, de wetten die de hartspier beschrijven en de wetten die de interactie tussen bloed en hartspier beschrijven.

C.2 Wetten die de bloedstroming beschrijven

De wetten die de bloedstroming beschrijven, zijn de wet van behoud van massa en de wet van behoud van impuls. Deze wetten worden geschreven voor een ééndimensionaal axisymmetrisch bewegend controlevolume (figuur C.2). Het controlevolume (V) wordt begrensd door de randen S en S' . De rand S' komt overeen met een deel van de hartspierwand. De rand S is geen fysieke rand maar bestaat uit twee secties loodrecht op de as basis-apex zoals aangeduid op de figuur. De aaneensluiting van alle controlevolumes vormt het totale ventrikelvolume.



Figuur C.2: Keuze van controlevolume voor het numeriek model.

In functie van de tijd kan het controlevolume zich verplaatsen. Het kan ook vervormen : de randen kunnen onafhankelijk van elkaar bewegen. De pijlen duiden aan dat massa of impuls kan buiten- of binnenstromen in het controlevolume. In axiale richting is er enkel een netto flux wanneer de snelheid van de stroming (u) verschillend is van de snelheid van de rand (u_s). De spierwand (S') beweegt ook, maar er is geen netto flux doorheen deze rand. De beweging van alle randen geeft aanleiding tot een volumeverandering.

De wet van behoud van massa wordt in integraalformulering geschreven als :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV + \int_S \rho u (u - u_S) dS = 0. \quad (\text{C.1})$$

De wet van behoud van impuls wordt geschreven als :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV + \int_S \rho u (u - u_S) dS = \sum F_x, \quad (\text{C.2})$$

met F_x de component in axiale richting van de kracht \underline{F} .

Er wordt enkel rekening gehouden met de krachten ten gevolgen van de druk. De wrijvingskracht is moeilijk te begroten aangezien de stromingsprofielen in de verschillende secties niet gekend zijn. De diameters van de verschillende secties zijn relatief groot, daarom worden de wrijvingskrachten als benadering verwaarloosd. Een externe kracht die zou kunnen inwerken kan het zwaarteveld zijn. Hier wordt verondersteld dat de as van de ventrikel zich in een horizontaal vlak bevindt. Er is dan geen invloed van het zwaarteveld.

De som van de krachten is dan :

$$\sum F_x = \int_{S+S'} p \underline{1}_x \cdot (-\underline{n}) dS, \quad (\text{C.3})$$

met \underline{n} de uitwendige normaal op de rand en $\underline{1}_x$ de eenheidsvector in axiale richting.

C.3 Wetten die de hartspier beschrijven

De hartspier wordt ook hier beschouwd als een omwentellingslichaam (zie figuur 6.1). De resultante van de omtreksspanning $\sigma_{\theta\theta}$ over de dikte is N_θ , de kracht per eenheid van lengte van de parallelcirkel. De resultante van de meridionale spanning $\sigma_{\phi\phi}$ over de dikte is N_ϕ , de kracht per eenheid van lengte van de meridiaan. Vanaf nu zijn

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N_\theta}{h} \quad \text{en} \quad \sigma_{\phi\phi} = \frac{N_\phi}{h} \quad (\text{C.4})$$

respectievelijk de gemiddelde omtreks- en meridionale spanning in de spierwand. Hierin stelt h de dikte van de spierwand voor. Analooog kan de gemiddelde rek in omtreks-richting en meridionale richting geschreven worden als $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$.

Het is niet de bedoeling om de spanningsverdeling in de spierwand exact te berekenen, waarbij rekening wordt gehouden met de oriëntatie van de spiervezels en de variatie van de elasticiteitsmodulus over de dikte. Zoals zal blijken, kunnen er met een eenvoudig model voor de spierwand reeds aanvaardbare resultaten voor het stromingsprobleem bereikt worden. Het verband tussen de spanningen en de rekken kan in het eenvoudigste geval als volgt geschreven worden :

$$\sigma_k = E\varepsilon_k, \quad (\text{C.5})$$

met index $k = \theta\theta$ of $\phi\phi$. De elasticiteitsmodulus E kan een constante zijn, maar kan ook een complexere functie zijn. De beschrijving van de hartspierwand is enigszins verschillend van de aanpak in hoofdstuk 6. Toch werd door bepaling van de parameters hetzelfde druk-volume verband bekomen als beschreven in §6.4.

C.4 Wetten die de interactie tussen bloed en hartspier beschrijven

Om het verband tussen de transmurale druk en de krachten in de hartspier te beschrijven, wordt de vergelijking van Laplace gebruikt, geldig voor een dunwandig membraan :

$$p = \frac{N_\theta}{R_\theta} + \frac{N_\phi}{R_\phi}, \quad (\text{C.6})$$

met R_θ de kromtestraal in omtreksrichting en R_ϕ de kromtestraal in meridionale richting (figuur 6.1). Voor een dikwandig membraan zijn de spanningen niet constant over de dikte zodat (C.6) gebruik makend van de gemiddelde spanningen (C.4), kan geschreven worden als :

$$\frac{p}{h} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R_\theta} + \frac{\sigma_{\phi\phi}}{R_\phi}. \quad (\text{C.7})$$

Hierbij worden de kromtestralen ook benaderd als de gemiddelde kromtestralen over de dikte.

Doorheen de apex kan geen bloed naar buiten stromen. De snelheid van de bloedstroming is daar dus gelijk aan de snelheid waarmee de apex beweegt :

$$\frac{\partial x_{apex}}{\partial t} = u_{apex}, \quad (\text{C.8})$$

met x_{apex} de positie van de apex en u_{apex} de snelheid van de bloedstroming ter hoogte van de apex.

Beschouw nu een deel van de hartspier, begrepen tussen twee parallelcirkels met stralen r_1 en r_2 . Het krachtenevenwicht geprojecteerd op de axiale richting drukt uit dat

$$N_{\phi_1} \cos(\phi_1) 2\pi r_1 - N_{\phi_2} \cos(\phi_2) 2\pi r_2 = p\pi(r_1^2 - r_2^2), \quad (\text{C.9})$$

met ϕ_1 en ϕ_2 de hoeken tussen de raaklijn van de meridiaan en de symmetrie-as van het omwentelingslichaam, ter hoogte van de twee parallelcirkels 1 en 2.

Er wordt geen rekening gehouden met de traagheid van de hartspier. Dit zou anders zijn weerslag vinden in het invoeren van een traagheidsterm in bovenstaande formules.

C.5 Discretisatie van de vergelijkingen

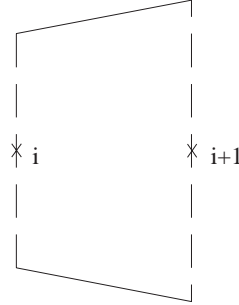
Dick [27] beschrijft een discretisatiemethode voor de ééndimensionale stationaire Euler-vergelijkingen. De onbekenden zijn soortelijke massa (ρ), snelheid (u) en druk (p). Het verloop van de sectie (S) is gegeven. De toepassing is de berekening van een stationaire gasstroming in een straalpijp. Deze methode wordt in dit werk uitgebreid voor de berekening van een niet-stationaire stroming van een incompressibele vloeistof in een geometrie waarvan de randen kunnen bewegen. Dit zal gebeuren in verschillende stappen :

1. De stationaire stroming van een incompressibele vloeistof in een stilstaand elastisch kanaal wordt bekeken.
2. De uitbreiding naar een niet-stationaire stroming wordt gedaan.
3. De beweging van de randen wordt in rekening gebracht.
4. De vergelijking van Laplace wordt gediscretiseerd.
5. Het krachtenevenwicht in axiale richting wordt gediscretiseerd.

De lezer die niet vertrouwd is met numerieke technieken hoeft de uitwerking van de discretisatiemethode niet te doorgronden om de volgende hoofdstukken van het werk te begrijpen.

C.5.1 Stationaire stroming van een incompressibele vloeistof in een elastisch kanaal

Als controlevolume wordt de cel begrensd door sectie i en $i + 1$ genomen (figuur C.3).



Figuur C.3: Controlevolume begrensd door twee knopen.

De wetten van behoud van massa en impuls worden voor deze cel geschreven als :

$$(uS)_{i+1} - (uS)_i = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$(u^2 S)_{i+1} - (u^2 S)_i + \frac{1}{\rho} \left(p_{i+1} S_{i+1} - p_i S_i - (S_{i+1} - S_i) \frac{1}{2} (p_i + p_{i+1}) \right) = 0. \quad (\text{C.11})$$

Behoud van impuls kan herschreven worden als :

$$(u^2 S)_{i+1} - (u^2 S)_i + \frac{1}{2} (S_i + S_{i+1}) \frac{1}{\rho} (p_{i+1} - p_i) = 0. \quad (\text{C.12})$$

Indien $\Delta \cdot = \cdot_{i+1} - \cdot_i$ en $\bar{\cdot} = 1/2(\cdot_i + \cdot_{i+1})$ dan kunnen worden deze vergelijkingen op een algebraïsch exacte manier geschreven als :

$$\bar{u} \Delta S + \bar{S} \Delta u = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\bar{u} \bar{S} \Delta u + \bar{u} \Delta(uS) + \bar{S} \frac{\Delta p}{\rho} = 0. \quad (\text{C.14})$$

Nu is $\Delta(uS) = 0$. Dit is immers de massavergelijking. Indien de druk in knoop i kan geschreven worden als

$$p_i = E'_i(S_i - S_{0_i}) + E''_i, \quad (\text{C.15})$$

dan geldt

$$\Delta p = \overline{E'}(\Delta S - \Delta S_0) + (\overline{S} - \overline{S}_0)\Delta E' + \Delta E''. \quad (\text{C.16})$$

Verder zal getoond worden dat de vergelijking van Laplace inderdaad aanleiding geeft tot zulk een verband voor druk en sectie. Met (C.16) en $\bar{\bar{u}} = \overline{S}u/\overline{S}$ wordt (C.14)

$$\bar{\bar{u}} \Delta u + \frac{\overline{E'}}{\rho} \Delta S + \frac{(\overline{S} - \overline{S}_0)}{\rho} \Delta E' - \frac{\overline{E'}}{\rho} \Delta S_0 + \frac{\Delta E''}{\rho} = 0. \quad (\text{C.17})$$

Met $b'' = (\overline{S} - \overline{S}_0)\Delta E'/\rho - \overline{E'}\Delta S_0/\rho + \Delta E''/\rho$ worden massa- en impulsvergelijking in matrixvorm geschreven als

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{u}} & \overline{S} \\ \overline{E'}/\rho & \bar{\bar{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b'' \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

of

$$A\Delta Q = b. \quad (\text{C.19})$$

De eigenwaarden van A voldoen aan

$$(\bar{u} - \lambda)(\bar{\bar{u}} - \lambda) - \frac{\overline{E'}\overline{S}}{\rho} = 0 \quad (\text{C.20})$$

en zijn

$$\lambda_{1,2} = \tilde{u} \pm \bar{c}, \quad (\text{C.21})$$

met

$$\tilde{u} = \frac{\bar{u} + \bar{\bar{u}}}{2}, \quad (\text{C.22})$$

$$\bar{c}^2 = \frac{\overline{E'}\overline{S}}{\rho} + \left(\frac{\bar{u} - \bar{\bar{u}}}{2} \right)^2, \quad (\text{C.23})$$

met \bar{c} de golfsnelheid wanneer er geen stroming is ($u = 0$). Verder worden de linkereigenvectormatrix L en rechtereigenvectormatrix $R = L^{-1}$ gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\overline{E'}}{\rho} & \bar{c}(1 - \delta) \\ \frac{\overline{E'}}{\rho} & -\bar{c}(1 + \delta) \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2\overline{E'}}(1 + \delta) & \frac{\rho}{2\overline{E'}}(1 - \delta) \\ \frac{1}{2\bar{c}} & -\frac{1}{2\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

met

$$\delta = \frac{\bar{u} - \bar{\bar{u}}}{2\bar{c}}. \quad (\text{C.25})$$

De matrix A kan gesplitst worden in een positief en een negatief deel die respectievelijk opgebouwd worden met de positieve en negatieve eigenwaarden :

$$A^+ = R\Lambda^+L, \quad (\text{C.26})$$

$$A^- = R\Lambda^-L, \quad (\text{C.27})$$

waarbij

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm \end{bmatrix}, \quad (\text{C.28})$$

met $\lambda_k^+ = \max(\lambda_k, 0)$ en $\lambda_k^- = \min(\lambda_k, 0)$. Algemeen kan de matrix A dan als volgt opgesplitst worden :

$$A = R\Lambda L = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)L = R\Lambda^+L + R\Lambda^-L = A^+ + A^-. \quad (\text{C.29})$$

Geassocieerd aan de gesplitte eigenwaardenmatrices worden waarheidsmatrices D^+ en D^- gedefinieerd als diagonaalmatrices met '1' elementen op de plaatsen waar in de gesplitte eigenwaardenmatrices niet-nullen voorkomen :

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.30})$$

$$\Lambda^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{bmatrix} \rightarrow D^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Voorvermenigvuldigmatrices M^+ en M^- worden dan geconstrueerd als

$$M^+ = RD^+L, \quad M^- = RD^-L, \quad (\text{C.32})$$

zodat

$$M^+A = A^+, \quad M^-A = A^-. \quad (\text{C.33})$$

(C.19) kan nu gesplit worden in

$$A^+\Delta Q = b^+ = M^+b, \quad (\text{C.34})$$

$$A^-\Delta Q = b^- = M^-b. \quad (\text{C.35})$$

Beide subsystemen (C.34) en (C.35) zijn singulier. Het positieve subsysteem bevat enkel lineaire combinaties van positieve-eigenvectorvergelijkingen, terwijl het negatieve subsysteem enkel lineaire combinaties van negatieve-eigenvectorvergelijkingen bevat. Voor subkritische stroming is er één eigenwaarde positief, de andere is negatief. De vergelijkingen voor knoop i worden bekomen door het positieve subsysteem voor het interval $(i-1, i)$ te combineren met het negatieve subsysteem voor het interval $(i, i+1)$:

$$(A_{i-1,i}^+ - A_{i,i+1}^-)Q_i = A_{i-1,i}^+Q_{i-1} - A_{i,i+1}^-Q_{i+1} + b_{i-1,i}^+ + b_{i,i+1}^-. \quad (\text{C.36})$$

Voor de eerste en laatste knoop moeten respectievelijk het negatieve en positieve subsysteem aangevuld worden met een bijkomende randvoorwaarde.

Hierboven werden de oorspronkelijke vergelijkingen voor de cellen (C.10) en (C.11) herschreven naar vergelijkingen per knoop (C.36). Er is één knoop meer dan het aantal cellen. Daarom dienen twee randvoorwaarden toegevoegd te worden om het stelsel vergelijkingen op te lossen. De oplossing van de vergelijkingen per cel geformuleerd is voor een subkritische stroming exact gelijk aan de oplossing van de vergelijkingen per knoop geformuleerd.

De vergelijkingen per knoop geschreven zijn gelineariseerd en elliptisch van aard. Alle standaarditeratieve methodes voor elliptische problemen kunnen dus gebruikt worden om deze vergelijkingen op te lossen [28].

C.5.2 Uitbreiding naar een niet-stationaire stroming

Wanneer de tijdstermen in rekening worden gebracht, worden (C.10) en (C.11)

$$\frac{\partial \Delta x \bar{S}}{\partial t} + (uS)_{i+1} - (uS)_i = 0, \quad (\text{C.37})$$

$$\frac{\partial \Delta x \bar{S} \bar{u}}{\partial t} + (u^2 S)_{i+1} - (u^2 S)_i + \frac{1}{2}(S_i + S_{i+1}) \frac{1}{\rho} (p_{i+1} - p_i) = 0. \quad (\text{C.38})$$

Naar de knopen geschreven, levert dit :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta(\Delta x_{i-1,i} M_{i-1,i}^+ \bar{Q}_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1} M_{i,i+1}^- \bar{Q}_{i,i+1})}{\Delta t} + (A_{i-1,i}^+ - A_{i,i+1}^-) Q_i \\ & = A_{i-1,i}^+ Q_{i-1} - A_{i,i+1}^- Q_{i+1} + b_{i-1,i}^+ + b_{i,i+1}^-. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Nu is

$$M_{i-1,i}^+ = M_{i,i}^+ + O(\Delta x), \quad (\text{C.40})$$

$$M_{i,i+1}^- = M_{i,i}^- + O(\Delta x) \quad (\text{C.41})$$

en

$$\bar{Q}_{i-1,i} = Q_i + O(\Delta x), \quad (\text{C.42})$$

$$\bar{Q}_{i,i+1} = Q_i + O(\Delta x) \quad (\text{C.43})$$

en

$$\Delta x_{i-1,i} = \Delta x_{i-1/2,i+1/2} + O(\Delta x), \quad (\text{C.44})$$

$$\Delta x_{i,i+1} = \Delta x_{i-1/2,i+1/2} + O(\Delta x), \quad (\text{C.45})$$

zodat (C.39) kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{\Delta t} (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + (A_{i-1,i}^+ - A_{i,i+1}^-) Q_i \\ & = A_{i-1,i}^+ Q_{i-1} - A_{i,i+1}^- Q_{i+1} + b_{i-1,i}^+ + b_{i,i+1}^-, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

met $\Delta x = \Delta x_{i-1/2, i+1/2}$. Dit schema is 1^e orde nauwkeurig in de ruimte. Als tijds-integratiemethode wordt een 'backward' Euler-methode gebruikt [28]. Deze methode is onvoorwaardelijk stabiel en eerste-orde-nauwkeurig in de tijd. De vergelijkingen worden dan

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} I + A_{i-1,i}^+ - A_{i,i+1}^- \right) Q_i^{n+1} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t} Q_i^n + A_{i-1,i}^+ Q_{i-1}^{n+1} - A_{i,i+1}^- Q_{i+1}^{n+1} + b_{i-1,i}^+ + b_{i,i+1}^-, \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

met I de 2x2 eenheidsmatrix. Er wordt gekozen om ook de matrices A en vectoren b op tijdstip $n + 1$ te berekenen.

C.5.3 Beweging van de randen wordt in rekening gebracht

Wanneer de beweging van de randen ook in rekening wordt gebracht, wordt geopteerd om de impulsvergelijking niet te combineren met de massavergelijking, wat gebeurd is in (C.17). Dit betekent dat linker- en rechterlid van (C.19) nu voorvermenigvuldigd zijn met matrix T ,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{u}} & \bar{S} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.48})$$

De tijdsafgeleiden uit (C.1) en (C.2) worden dan geschreven als :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{V}{\Delta t} \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} S \\ u \end{bmatrix}^{n+1} - \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{V}{\Delta t} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} S \\ u \end{bmatrix}^n, \quad (\text{C.49})$$

met V het volume van het duaal controlevolume begrepen tussen $x_{i-1/2}$ en $x_{i+1/2}$ of

$$V = \frac{\Delta x_{i-1,i}}{2} \left(\frac{3}{4} S_i + \frac{1}{4} S_{i-1} \right) + \frac{\Delta x_{i,i+1}}{2} \left(\frac{3}{4} S_i + \frac{1}{4} S_{i+1} \right) \quad (\text{C.50})$$

De termen uit (C.1) en (C.2) waarin de snelheid van de rand van het controlevolume voorkomen, worden ook gediscretiseerd op het duale controlevolume :

$$\Delta \begin{bmatrix} Su_S \\ Suu_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i+1/2}^{n+1/2} u_{S_{i+1/2}} \\ S_{i+1/2}^{n+1/2} u_{i+1/2}^{n+1/2} u_{S_{i+1/2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{i-1/2}^{n+1/2} u_{S_{i-1/2}} \\ S_{i-1/2}^{n+1/2} u_{i-1/2}^{n+1/2} u_{S_{i-1/2}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.51})$$

met

$$S_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (S_i^n + S_{i+1}^n + S_i^{n+1} + S_{i+1}^{n+1}) \quad (\text{C.52})$$

en met

$$u_{S_{i+1/2}} = \frac{1}{2} (u_{S_i} + u_{S_{i+1}}), \quad (\text{C.53})$$

waarbij

$$u_{S_i} = \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t}. \quad (\text{C.54})$$

De andere termen in (C.51) worden op een analoge manier berekend.

Doordat het grid beweegt worden de eigenwaarden van het stromingsprobleem

$$\lambda_{1,2} = \tilde{u} - u_S \pm \bar{c}. \quad (\text{C.55})$$

Hiermee wordt rekening gehouden bij de berekening van de voorvermenigvuldigma-trices M^+ en M^- .

C.5.4 Discretisatie van de vergelijking van Laplace

De rekken $\varepsilon_{\theta\theta}$ en $\varepsilon_{\phi\phi}$ in knoop i worden als volgt berekend :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\pi r_i - 2\pi r_{0_i}}{2\pi r_{0_i}} i, \quad (\text{C.56})$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{l_i - l_{0_i}}{l_{0_i}}, \quad (\text{C.57})$$

waarbij

$$l_i = \frac{1}{2} (l_{i-1,i} + l_{i,i+1}), \quad (\text{C.58})$$

$$l_{0_i} = \frac{1}{2} (l_{0_{i-1},i} + l_{0_i,i+1}), \quad (\text{C.59})$$

met

$$l_{i,i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (r_{i+1} - r_i)^2}. \quad (\text{C.60})$$

De index $_0$ duidt op de referentietoestand waarbij de rekken nul zijn. r is de straal ter hoogte van knoop i . $l_{i-1,i}$, $l_{0_{i-1},i}$ en $l_{0_i,i+1}$ worden op een analoge manier berekend.

De vergelijking van Laplace (C.6) in knoop i wordt :

$$p = Eh \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{R_\theta} + \frac{\varepsilon_{\phi\phi}}{R_\phi} \right). \quad (\text{C.61})$$

Nu is [26]

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2}} \quad (\text{C.62})$$

en

$$S - S_0 = \pi(r^2 - r_0^2) = \pi(r + r_0)(r - r_0), \quad (\text{C.63})$$

zodat (C.61) kan geschreven worden als

$$p_i = \frac{E_i h_i}{\pi r_i r_{0_i} (r_i + r_{0_i}) \sqrt{1 + \left(\frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right)^2}} (S_i - S_{0_i}) + E_i h_i \frac{\varepsilon_{\phi\phi}}{R_\phi}. \quad (\text{C.64})$$

Deze vergelijking is dus wel degelijk van de vorm (cfr. (C.15))

$$p_i = E'_i (S_i - S_{0_i}) + E''_i, \quad (\text{C.65})$$

met

$$E'_i = \frac{E_i h_i}{\pi r_i r_{0_i} (r_i + r_{0_i}) \sqrt{1 + \left(\frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right)^2}} \quad (\text{C.66})$$

en

$$E'' = E_i h_i \frac{\varepsilon_{\phi\phi}}{R_\phi}. \quad (\text{C.67})$$

Hierin wordt R_ϕ berekend als de straal van de cirkel door de punten (x_{i-1}, r_{i-1}) , (x_i, r_i) en (x_{i+1}, r_{i+1}) . Voor een geometrie waarbij de straal lineair verandert of constant blijft, is R_ϕ oneindig, zodat E''_i nul wordt.

De golfsnelheid c werd gegeven door (C.23)

$$\bar{c}^2 = \frac{\overline{E'S}}{\rho} + \left(\frac{\overline{u} - \bar{\bar{u}}}{2} \right)^2. \quad (\text{C.68})$$

Voor een geometrie met constante sectie wordt deze uitdrukking herleid tot

$$c = \sqrt{\frac{E'S}{\rho}}. \quad (\text{C.69})$$

Door combinatie van (C.66) met (C.69) wordt

$$c = \sqrt{\frac{EhS}{\pi r r_0 (r + r_0) \rho}}. \quad (\text{C.70})$$

Voor kleine vervormingen van de geometrie is $r \approx r_0$ zodat (C.70) wordt :

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}}. \quad (\text{C.71})$$

De formule van Moens-Korteweg wordt dus teruggevonden.

C.5.5 Discretisatie van het krachtenevenwicht in axiale richting

(C.9) wordt voor knoop i gediscrètiseerd als volgt :

$$\begin{aligned} N_{\phi_{i-1/2}} \cos(\phi_{i-1/2}) 2\pi r_{i-1/2} - N_{\phi_{i+1/2}} \cos(\phi_{i+1/2}) 2\pi r_{i+1/2} \\ = p_i \pi (r_{i-1/2}^2 - r_{i+1/2}^2). \end{aligned} \quad (C.72)$$

Deze vergelijking wordt gebruikt om de positie van de knopen vast te leggen. Met

$$\cos(\phi_{i+1/2}) = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (r_{i+1} - r_i)^2}} \quad (C.73)$$

en met

$$N_{\phi_{i+1/2}} = E_{i+1/2} h_{i+1/2} \varepsilon_{\phi_{i+1/2}} = E_{i+1/2} h_{i+1/2} \frac{l_{i,i+1} - l_{0,i+1}}{l_{0,i+1}}, \quad (C.74)$$

wordt (C.72) :

$$\begin{aligned} f(x_i, \dots) &= 2\pi r_{i+1/2} E_{i+1/2} h_{i+1/2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{l_{0,i+1}} - \frac{x_{i+1} - x_i}{l_{i,i+1}} \right) \\ &- 2\pi r_{i-1/2} E_{i-1/2} h_{i-1/2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{l_{0,i-1}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{l_{i-1,i}} \right) \\ &- p_i \left(\frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (C.75)$$

Deze vergelijking wordt gelineariseerd rond x_i^0 als volgt :

$$f(x_i, \dots) = f(x_i^0, \dots) + f'(x_i^0, \dots)(x_i - x_i^0) = 0, \quad (C.76)$$

waarbij het accent de afgeleide naar x_i voorstelt. Uitgaande van een initiële schatting x_i^0 kan een nieuwe waarde voor x_i berekend worden :

$$f'(x_i^0, \dots)x_i = f'(x_i^0, \dots)x_i^0 - f(x_i^0, \dots). \quad (C.77)$$

De afgeleide functie $f'(x_i, \dots)$ wordt gegeven door :

$$\begin{aligned} f'(x_i, \dots) = & -2\pi r_{i+1/2} E_{i+1/2} h_{i+1/2} \left(\frac{1}{l_{0i,i+1}} - \frac{(r_{i+1} - r_i)^2}{l_{i,i+1}^3} \right) \\ & - 2\pi r_{i-1/2} E_{i-1/2} h_{i-1/2} \left(\frac{1}{l_{0i-1,i}} - \frac{(r_i - r_{i-1})^2}{l_{i-1,i}^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

C.6 Overzicht van de vergelijkingen

Alle subsystemen worden tegelijkertijd opgelost (zie §C.8). De vergelijkingen voor knoop i worden in matrixvorm gegeven door :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta x / \Delta t & & & \\ & V / \Delta t & & \\ -E'_i & & 1 & \\ & & & f'(x_i, \dots) \end{bmatrix}^{n+1,l} \begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_i^{n+1,l+1} \\ & - \begin{bmatrix} \Delta x / \Delta t & & & \\ & V / \Delta t & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_i^n \\ & + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{S} \\ & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- \\ M_{21}^- & M_{22}^- \\ & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{S} & & \\ 0 & \bar{u} & 1/\rho & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right)_{i+1/2}^{n+1,l} \\ & \left(\begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_{i+1}^{n+1,l} - \begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_i^{n+1,l+1} \right) \\ & + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{u} & \bar{S} \\ & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^+ & M_{12}^+ \\ M_{21}^+ & M_{22}^+ \\ & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{S} & & \\ 0 & \bar{u} & 1/\rho & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right)_{i-1/2}^{n+1,l} \\ & \left(\begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_i^{n+1,l+1} - \begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}_{i-1}^{n+1,l} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

$$= \begin{bmatrix} (Su_S)_{i+1/2}^{n+1/2,l} - (Su_S)_{i-1/2}^{n+1/2,l} \\ (Suu_S)_{i+1/2}^{n+1/2,l} - (Suu_S)_{i-1/2}^{n+1/2,l} \\ -E'_i S_{0_i} + E''_i \\ -f(x_i^{n+1,l}, \dots) + f'(x_i^{n+1,l}, \dots)x_i^{n+1,l} \end{bmatrix}.$$

De niet ingevulde elementen stellen nullen voor.

Het stelsel kan verkort worden geschreven als

$$\begin{aligned} & C_1^{n+1,l} \xi_i^{n+1,l+1} - C_2^n \xi_i^n \\ & + (TM^- A)_{i+1/2}^{n+1,l} (\xi_{i+1}^{n+1,l} - \xi_i^{n+1,l+1}) \\ & + (TM^+ A)_{i-1/2}^{n+1,l} (\xi_i^{n+1,l+1} - \xi_{i-1}^{n+1,l}) \\ & = D, \end{aligned} \tag{C.80}$$

met

$$\xi = \begin{bmatrix} S \\ u \\ p \\ x \end{bmatrix}, \tag{C.81}$$

waarbij de matrices C_1 , C_2 , T , M^+ , M^- , A en D volgen uit vergelijking van (C.80) met (C.79).

C.7 Randvoorwaarden

C.7.1 Inlaat

De eerste twee vergelijkingen uit het stelsel (C.79) beschrijven het behoud van massa en impuls. Dit subsysteem kan voor wat betreft de convectieve termen ontbonden worden in twee afzonderlijke golfvergelijkingen. Dit worden de karakteristieke vergelijkingen genoemd. Door het subsysteem vóór te vermenigvuldigen met de matrix LT^{-1}

wordt de term

$$(TM^+A)(\xi_i - \xi_{i-1})$$

geschreven als

$$(D^+LA)(\xi_i - \xi_{i-1}), \quad (\text{C.82})$$

aangezien $LT^{-1}TM^+A = LT^{-1}TRD^+LA = D^+LA$. Voor een subkritische inlaat ($u < c$) is

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.83})$$

Het tweede element van de vector (C.82) is dus nul. Na voorvermenigvuldigen met LT^{-1} beschrijft de tweede vergelijking dus de golf die van $i + 1$ naar i loopt. Deze vergelijking wordt de karakteristieke randvoorwaarde genoemd. De eerste vergelijking beschrijft de golf die van $i - 1$ naar i loopt. Deze vergelijking kan niet gebruikt worden aangezien de toestand in $i - 1$ niet gekend is. Ze wordt vervangen door een bijkomende randvoorwaarde. Hier werd als randvoorwaarde het verloop van de snelheid in de tijd opgelegd. De vergelijking die het krachterevenwicht uitdrukt kan ook niet gebruikt worden omdat daarvoor ook informatie nodig is van het punt $i - 1$. Ze wordt vervangen door de vergelijking die uitdrukt dat de inlaat een vast punt is : $x_i = 0$. Waar nu in de resterende vergelijkingen nog informatie nodig is van de knoop $i - 1$ wordt deze geëxtrapoleerd uit i en $i + 1$.

C.7.2 Uitlaat

Voor de uitlaat geldt een analoog verhaal als voor de inlaat. De tweede karakteristieke vergelijking wordt nu echter vervangen door een andere vergelijking. In het geval van het hartmodel wordt de sectie aan de uitlaat op nul gesteld : $S_i = 0$. De vergelijking van Laplace en de vergelijking die het krachterevenwicht uitdrukt drukken dan echter dezelfde voorwaarde uit. Eén van beiden moet dus vervangen worden door een bijkomende vergelijking. Deze vergelijking drukt uit dat de snelheid waarmee de apex zich verplaatst gelijk is aan de snelheid van de bloedstroming ter hoogte van de apex :

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} = u_i^{n+1}. \quad (\text{C.84})$$

C.8 Oplossen van de gediscretiseerde vergelijkingen

Het oplossen van (C.79) gebeurt door per tijdstap een aantal Jacobi-iteraties uit te voeren [28]. Per Jacobi-iteratie wordt een nieuwe waarde berekend voor de termen met index $^{l+1}$. De termen met index l zijn waarden uit een vorige Jacobi iteratie. Er wordt geïtereerd totdat de waarden met index $^{l+1}$ voldoende dicht de waarden met index l benaderen. Nadien kan een nieuwe tijdstap berekend worden. De methode is dus volledig gekoppeld en direkt (alle subsystemen worden immers tegelijk opgelost).

Bibliografie

- [1] T. J. Barth. Aspects on unstructured grids and finite volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. In *AGARD report 787*, pages 6.1–6.61, 1992. VKI Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows.
- [2] J. T. Batina. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. In *Proc. 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno*, 1989. AIAA-89-0115.
- [3] B.J. Bellhouse. Fluid mechanics of a model mitral valve and left ventricle. *Cardiovasc. Res.*, 6:199–210, 1972.
- [4] B.J. Bellhouse and L. Talbot. The fluid mechanics of the aortic valve. *J. Fluid. Mech.*, 35(4):721–735, 1968.
- [5] J.W. Boerstoeel. Numerieke stromingsleer iii : Multiblock grid generation in computational fluid dynamics. Tweede-fase cursus, J.M. Burgerscentrum, 1994.
- [6] P.H.M. Bovendeerd. The mechanics of the normal and ischemic left ventricle during the cardiac cycle -a numerical and experimental analysis. Proefschrift doctoraat, Rijksuniversiteit Limburg, Maastricht, 1990.
- [7] A. Bowyer. Computing Dirichlet tessellations. *Comp. J.*, 24:162–166, 1981.
- [8] G.A. Brecher and A.T. Kissen. Relation of negative intraventriculare pressure to ventricular volume. *Circ. Res.*, 5(157), 1957.
- [9] J.D. Bronzino. *Biomedical engineering handbook*. CRC Press. Inc., first edition, 1995. ISBN 0-8493-8346-3.
- [10] P. Brun, C. Tribouilloy, A.M. Duval, L. Iseriu, A. Meguira, G. Pelle, and J.L. Dubois-Randé. Left ventricular flow propagation during early filling is related to wall relaxation : a color M-mode Doppler analysis. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 20(2):420–32, 1992.
- [11] P. G. Bunning, I. T. Chiu, S. Obayashi, Y. M. Rizk, and J. L. Stegger. Numerical simulation of the integrated space shuttle vehicle in ascent. *AIAA*, 88-4359-CP, 1988.

- [12] F. Cassot and A. Saadjian. Flow analysis within the left ventricle using an integral equation method : interest in left ventricular function assessment. *Med. Progr. Tech.*, 8:39–47, 1980.
- [13] R.S. Chadwick. Mechanics of the left ventricle. *Biophys. J.*, 39:279–288, 1982.
- [14] R.S. Chadwick, J. Ohayon, and M. Lewkowicz. Wall-thickness and midwall-radius variations in ventricular mechanics. *Proc. Natl. Sci. USA*, 86:2996–2999, May 1989. Applied mathematics.
- [15] B. Chahboune. Simulation numérique par la méthode des elements finis du couplage fluide-structure. Phd thesis, Université de Franche-Comte, 1994.
- [16] Y. Choi and C. Merkle. The application of preconditioning in viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 105:207–223, 1993.
- [17] The Cleveland Clinic Foundation. *Diastology : basic, diagnostic and therapeutic aspects of diastolic function*. 1994.
- [18] M.B. Coelho. *Zakwoordenboek der geneeskunde*. Elsevier - Koninklijke PBNA, 1989. 23ste uitgave, ISBN 90-6228-089-7.
- [19] M. Courtois, S.J. Jr. Kovács, and P.A. Ludbrook. Transmitral pressure-flow velocity relation : Importance of regional pressure gradients in the left ventricle during diastole. *Circulation*, 78:661–671, 1988.
- [20] M. Courtois, S.J. Jr. Kovács, and P.A. Ludbrook. The physiologic early diastole intraventricular pressure gradient is lost during acute myocardial ischemia. *Circulation*, 81:1688–1696, 1990.
- [21] M. Courtois and P.A. Ludbrook. Intraventricular pressure transients during relaxation and filling. *Left ventricular diastolic dysfunction and heart failure*, 10:150–166.
- [22] M. Courtois, C.J. Mechem, B. Barzilai, and P.A. Ludbrook. The early diastolic pressure-flow relationship is dependent on pressure sampling sites and timing factors. *Coronary Artery Disease*, 3:331, 1992.
- [23] M. Courtois, C.J. Mechem, B. Barzilai, and P.A. Ludbrook. Factors related to end-systolic volume are important determinants of peak early diastolic transmitral flow velocity. *Circulation*, 85:1132–1138, 1992.
- [24] E. Cuthill and J. McKee. Reducing the band width of sparse symmetric matrices. In *Proc. of the ACM National Conference*, pages 157–172, 1969.
- [25] G. De Ley. Begrippen van menselijke fysiologie en anatomie. *Cursusnota's Licentie Biomedische Technieken, Universiteit Gent*, 1995.

- [26] R. Dechaene. Werktuigkundige toepassingen van de sterkteleer. *Cursusnota's Burgerlijk ingenieur, Universiteit Gent*, 1990.
- [27] E. Dick. A multigrid method for the Cauchy-Riemann equations based on flux-difference splitting and its extension to the steady Euler equations. *J. Comp. Appl. Math.*, 12&13:247–263, 1985.
- [28] E. Dick. Numerieke stromingsleer. *Cursusnota's Burgerlijk ingenieur, Universiteit Gent*, 1990.
- [29] E. Dick and J. Linden. A multigrid method for steady incompressible Navier-Stokes equations based on flux difference splitting. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 14:1311–1323, 1992.
- [30] A.M. Duval-Moulin, P. Dupouy, P. Brun, F. Zhuang, G. Pelle, Y. Perez, E. Teiger, A. Castaigne, P. Gueret, and J.L. Dubois-Randé. Left ventricular flow propagation during early filling is related to wall relaxation : a color M-mode Doppler analysis. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 29(6):1246–55, 1997.
- [31] J. Edwards and M.-S. Liou. Low-diffusion flux splitting methods for flows at all speeds. In *Proc. 13th AIAA CFD conference, Snowmass, CO*, pages 261–271. AIAA press, Washington, June 1997. AIAA-97-1862. ISBN 1-56347-233-3.
- [32] F.A. Flachskampf, A.E. Weyman, J.L. Guerrero, and J.D. Thomas. Calculation of atrioventricular compliance from the mitral flow profile : Analytic and in vitro study. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 19(5):998–1004, 1992.
- [33] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*. Springer Series in computational physics. Springer-Verlag, 1988. Volume 1, Fundamental and general techniques.
- [34] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*. Springer Series in computational physics. Springer-Verlag, 1988. Volume 2, Specific techniques for different flow categories.
- [35] L. Formaggia, J. Peraire, and K. Morgan. Simulation of a store separation using the finite element method. *Appl. Math. Modelling*, 12:175–181, 1988.
- [36] Y.C. Fung. *Biomechanics. Motion, flow, stress and growth*. Springer-Verlag New York Inc., first edition, 1990. ISBN 0-387-97124-6.
- [37] Y.C. Fung. *Biomechanics. Mechanical properties of living tissues*. Springer-Verlag New York Inc., second edition, 1993. ISBN 0-387-97947-6.
- [38] Y.C. Fung. *Biomechanics. Circulation*. Springer-Verlag New York Inc., second edition, 1997. ISBN 0-387-94384-6.

- [39] W.H. Gaasch, A.S. Blaustein, and M.M. LeWinter. Heart failure and clinical disorders of left ventricular diastolic function. In W.H. Gaasch and M.M. LeWinter, editors, *Left ventricular diastolic dysfunction and heart failure*, pages 245–258. Lea & Febiger, 1994.
- [40] W.H. Gaasch and M.M. LeWinter. *Left ventricular diastolic dysfunction and heart failure*. Lea & Febiger, first edition, 1994. ISBN 0-8121-1509-0.
- [41] W.F. Ganong. *Review of medical physiology*. Prentice-Hall International Inc., sixteenth edition, 1993. ISBN 0-8385-8234-6.
- [42] P. L. George, F. Hecht, and E. Saltel. Fully automatic mesh generator for 3D domains of any shape. *Impact of computing in science and engineering*, 2:187–218, 1990.
- [43] P. L. George, F. Hecht, and E. Saltel. Automatic mesh generator with specified boundary. In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 269–288, 1991.
- [44] P. L. George and F. Hermeline. Delaunay’s mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:975–995, 1992.
- [45] D.N. Ghista and H. Sandler. An analytic elastic-viscoelastic model for the shape and the forces in the left ventricle. *J. Biomech.*, 2:35–47, 1969.
- [46] A. Godfrey, R. Walters, and B. van Leer. Preconditioning for the Navier-Stokes equations with finite rate chemistry. In *Proc. 31st Aerospace Sciences Meeting, Reno*, 1993. AIAA-93-0535.
- [47] P. J. Green and R. Sibson. Computing Dirichlet tessellations in the plane. *Comp. J.*, 21:168–173, 1978.
- [48] N.L. Greenberg, P.M. Vandervoort, and J.D. Thomas. Estimation of diastolic intraventricular pressure gradients from color Doppler M-mode spatiotemporal velocities : Analytical Euler equation solution. *Computers in Cardiology 1994, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA*, pages 465–468, 1995.
- [49] N.L. Greenberg, P.M. Vandervoort, and J.D. Thomas. Instantaneous diastolic transmitral pressure differences from color Doppler M-mode echocardiography. *Am. J. Physiol.*, 271:H1267–H1276, 1996. (*Heart Circ. Physiol.* 40).
- [50] H. Guillard. Node-nested multigrid with Delaunay coarsening. Rapport de recherche 1898, INRIA, 1993.
- [51] L. Hakima. Modélisation de la paroi cardiaque. Simulation numérique de l’interaction fluide-structure. Phd thesis, Université de Franche-comté, 1997.

- [52] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. Numerical methods in engineering. J. Wiley & Sons, 1988. Volume 1, Fundamentals of numerical discretization.
- [53] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. Numerical methods in engineering. J. Wiley & Sons, 1990. Volume 2, Computational methods for inviscid and viscous flows.
- [54] D. G. Holmes and D. D. Snyder. The generation of unstructured triangular meshes using Delaunay triangulation. In *Proc. of the Second International Conference on Numerical Grid Generation in CFD, Miami*, pages 643–652, 1988.
- [55] J.D. Humphrey and F.C.P. Yin. A new constitutive formulation for characterizing the mechanical behavior of soft tissues. *Biophys. J.*, 52:563–570, 1987.
- [56] Y. Ishida, J.S. Meisner, K. Tsujioka, and et al. Left ventricular filling dynamics : Influence of left ventricular relaxation and left atrial pressure. *Circulation*, 74:187–196, 1986.
- [57] R.F. Janz and A.F. Grimm. Deformation of the diastolic left ventricle. *Biophysical Journal*, 13:689–704, 1973.
- [58] R.F. Janz and A.F. Grimm. Deformation of the diastolic left ventricle - I. nonlinear elastic effects. *Biophys. J.*, 13:689–704, 1973.
- [59] R.F. Janz, B.R. Kubert, T.F. Moriarty, and A.F. Grimm. Deformation of the diastolic left ventricle - II. nonlinear geometric effects. *J. Biomech.*, 7:509–516, 1974.
- [60] G. Jin and M. Braza. A nonreflecting outlet boundary condition for incompressible unsteady Navier-Stokes calculations. *J. Comp. Phys.*, 107:239–253, 1993.
- [61] S.M.H. Karimian and G.E. Schneider. Pressure-based control-volume finite element method for flow at all speeds. *AIAA*, 33(9):1611–16018, September 1995.
- [62] B. Koren. Improving Euler computations at low Mach numbers. *Comp. Fluid Dyn.*, 6:51–70, 1996.
- [63] B. Koren and B. van Leer. Analysis of preconditioning and multigrid for Euler flows with low-subsonic regions. *Advances in Computational Mathematics*, 4:127–144, 1995.
- [64] C. L. Lawson. Generation of a triangular grid with application to contour plotting. Technical Report 299, CalTech, 1972.
- [65] C.S.F. Lee and L. Talbot. A fluid-mechanical study of the closure of heart valves. *J. Fluid. Mech.*, 91(1):41–63, 1979.

- [66] D. Lee, B. van Leer, and J. Lynn. A local Navier-Stokes preconditioner for all Mach and cell Reynolds numbers. In *Proc. 13th AIAA CFD conference, Snowmass, CO*, pages 842–855. AIAA press, Washington, June 1997. AIAA-97-2024. ISBN 1-56347-233-3.
- [67] D.J. Lenihan, C.G. Myron, M.D. Hoit, and R.A. Walsh. Mechanics, diagnosis, and treatment of diastolic heart failure. *European Heart Journal*, 130:153–66, 1995.
- [68] J.L. Levine and W.H. Gaasch. Clinical recognition and treatment of diastolic dysfunction and heart failure. In W.H. Gaasch and M.M. LeWinter, editors, *Left ventricular diastolic dysfunction and heart failure*, pages 439–454. Lea & Febiger, 1994.
- [69] D. Ling, J.S. Rankin, C.H. Edwards, P.A. McHale, and R.W. Anderson. Regional diastolic mechanics of the left ventricle in the conscious dog. *Am. J. Physiol.*, 236:323–330, 1979.
- [70] M.-S. Liou and C.J. Jr. Steffen. A new flux splitting scheme. *J. Comp. Phys.*, 107:23–39, 1993.
- [71] R. Löhner. An adaptive finite element solver for transient problems with moving bodies. *Comp. Struct.*, 30:303–317, 1988.
- [72] R. Löhner. Finite element methods in CFD: grid generation, adaptivity and parallelization. Technical report, VKI, 1992. AGARD report 787, Special course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows.
- [73] D.J. Mavriplis. Adaptive mesh generation for viscous flows using Delaunay triangulation. In *Proc. of the Second International Conference on Numerical Grid Generation in CFD, Miami*, pages 611–620, 1988.
- [74] D.J. Mavriplis. Multigrid strategies for viscous flow solvers on anisotropic unstructured meshes. In *Proc. 13th AIAA CFD conference, Snowmass, CO*, pages 659–675. AIAA press, Washington, June 1997. AIAA-97-1952. ISBN 1-56347-233-3.
- [75] D.J. Mavriplis. Directional agglomeration multigrid techniques for High-Reynolds number viscous flows. Technical Report 98-7, ICASE, 1998.
- [76] D.J. Mavriplis. Multigrid strategies for viscous flow solvers on anisotropic unstructured meshes. Technical Report 98-6, ICASE, 1998.
- [77] D.M. McQueen and C.S. Peskin. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart II. Contractile fibers. *J. Comp. Phys.*, 82:289–297, 1989.

- [78] J. Meisner. Left atrial role in left ventricular filling : dog and computer studies. Phd thesis, Albert Einstein College of Medicine, Yeshiva University, New York, U.S.A., 1986.
- [79] K. Mer and B. Nkonga. Implicit calculations of an aeroelasticity problem. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, 9:165–178, 1998.
- [80] M. L. Merriam. An efficient advancing front algorithm for Delaunay triangulation. *AIAA*, 91-0792, 1991.
- [81] I. Mirsky. Left ventricular stresses in the intact human heart. *Biophysical Journal*, 9:189–208, 1969.
- [82] I. Mirsky. Ventricular and arterial wall stresses based on large deformation analyses. *Biophysical Journal*, 13:1141–1159, 1973.
- [83] I. Mirsky and J.S. Rankin. The effects of geometry, elasticity and external pressure on the diastolic pressure-volume and stiffness-stress relations. *Circ. Res.*, 44:601–611, 1979.
- [84] T. J. Mitty, T. J. Baker, and A. Jameson. Generation and adaptive alternation of unstructured three-dimensional meshes. In *Proc. of the third International Conference on Numerical Grid Generation in CFD and related Fields, Barcelona*, pages 3–12, 1991.
- [85] E. Morgan, J. Periaux, and F. Thomasset. *Analysis of laminar flow over a backward facing step*, volume 9, Notes on Numerical Fluid Mechanics. Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [86] D. Morvan. étude expérimentale et numérique de l'écoulement intraventriculaire. Phd thesis, L'université d'Aix-Marseille II, 1985.
- [87] S.E. Moskowitz. Effects of inertia and viscoelasticity in late rapid filling of the left ventricle. *J. Biomech.*, 14(6):443–445, 1981. Technical Note.
- [88] W.W. Nichols and M.F. O'Rourke. *McDonald's Blood Flow in Arteries - Theoretical, experimental and clinical principles*. Arnold, fourth edition, 1998. ISBN 0-340-64614-4.
- [89] S. Nikolic, M. Fenely, O. Pajaro, J.S. Rankin, and E. Yellin. Origin of regional pressure gradients in the left ventricle during early diastole. *Am. J. Physiol.*, 268:550–557, 1995.
- [90] R.A. Nishimura, M.D. Abel, L.K. Hatle, and A.J. Tajik. Assesment of diastolic function of the heart : Background and current applications of Doppler echocardiography. *Mayo Clin Proc*, 64:181–204, 1989.

- [91] R.A. Nishimura, M.J. Callahan, and C.A. Warnes. Echocardiography, C. Doppler echocardiography. In E.R. Giuliani, V. Fuster, B.J. Gersch, M.D. McGoon, and D.C. McGoon, editors, *Cardiology, Phundamentals and practice*. Mosby-Year Book Inc., 1991. ISBN 0-8016-2006-6.
- [92] J. Ohayon and R.S. Chadwick. Effects of collagen microstructure on the mechanics of the left ventricle. *Biophys. J.*, 54:1077–1088, 1988.
- [93] A. Owen. A numerical model of early diastolic filling : Importance of intraventricular pressure wave propagation. *Cardiovasc. Res.*, 27:255–261, 1993.
- [94] B. Palmerio. Coupling mesh and flow in viscous fluid calculations when using unstructured triangular finite elements. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, 6:275–290, 1996.
- [95] T.J. Pedley. *The fluid mechanics of large blood vessels*. Cambridge University Press, 1980.
- [96] K. Perktold, E. Thurner, and Th. Kenner. Flow and stress characteristics in rigid walled and compliant artery bifurcation models. *Med. & Biol. Eng. & Comput.*, 32:19–26, 1994.
- [97] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a digital computer method for solving the equations of motion. Phd thesis, Yeshiva University, 1972.
- [98] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comp. Phys.*, 10:252–271, 1972.
- [99] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.*, 25:220–252, 1977.
- [100] C.S. Peskin and D.M. McQueen. Modeling prosthetic heart valves for numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.*, 37:113–132, 1980.
- [101] C.S. Peskin and D.M. McQueen. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. *J. Comp. Phys.*, 81:372–405, 1989.
- [102] C.S. Peskin and B.F. Printz. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. *J. Comp. Phys.*, 105:33–46, 1993.
- [103] J.G. Pinto and Y.C Fung. Mechanical properties of the heart muscle in the passive state. *J. Biomech.*, 6:597–616, 1973.
- [104] V. T. Rajan. Optimality of the Delaunay triangulation in R^d . In *Proc. of the 7th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 357–372, 1991.

- [105] A. Redaelli and F. M. Montevecchi. Computational evaluation of intraventricular pressure gradients based on a fluid-structure approach. *J. Biomech. Eng.*, 118:529–537, 1996.
- [106] P. J. Reuderink, F. N. Van de Vosse, A. A. Van Steenhoven, M. E. H. Van Dongen, and J. D. Janssen. Incompressible low-speed-ratio flow in non-uniform distensible tubes. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 16:597–612, 1993.
- [107] K. Riemsлагh. Numerieke simulatie van de stroming in uitlaatleidingen van dieselmotoren, gridgeneratie. Afstudeerwerk licentiaat informatica, Rijksuniversiteit Gent, Fakulteit Toegepaste Wetenschappen, 1990.
- [108] K. Riemsлагh. Tweedimensionale Euler-vergelijkingen op niet-gestructureerde roosters. Proefschrift doctoraat, Universiteit Gent, 1993.
- [109] K. Riemsлагh, J. Vierendeels, and E. Dick. Simulation of incompressible flow in moving geometries. Lecture series 1998–03, VKI, 1998.
- [110] K. Riemsлагh, J. Vierendeels, and E. Dick. Two-dimensional incompressible Navier-Stokes calculations in complex shaped moving domains. *J. Eng. Math.*, 34(1-2):57–73, 1998.
- [111] S. Rippa. Minimal roughness property of the Delaunay triangulation. *Computer Aided Geometric Design*, 7:489–497, 1990.
- [112] J.E. Romate. Boundary Integral Equation Methods. Tweede fase cursus : Numerieke stromingsleer IV, University of Twente, 13–17 feb 1995.
- [113] K. Sagawa, L. Maughan, H. Suga, and K. Sunagawa. *Cardiac contraction and the pressure-volume relationship*. Oxford University Press, 1988.
- [114] R.C. Schlant, R.W. Alexander, A.O. O’ Rourke, R. Roberts, and E.H. Sonnenblick. *Hurst’s The heart*, volume 1. McGraw-Hill, eighth edition, 1994.
- [115] R.C. Schlant, R.W. Alexander, A.O. O’ Rourke, R. Roberts, and E.H. Sonnenblick. *Hurst’s The heart*, volume 2. McGraw-Hill, eighth edition, 1994.
- [116] H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. Mechanical Engineering. McGraw-Hill, 1979.
- [117] P. Segers. Biomechanische modellering van het arterieel systeem voor de niet-invasieve bepaling van de arteriële compliantie. Proefschrift doctoraat, Universiteit Gent, 1997.
- [118] J.L. Sendón. Regional myocardial ischaemia and diastolic dysfunction in hypertensive heart disease. *European Heart Journal*, 14:110–113, 1993.
- [119] R. Sibson. Locally equiangular triangulations. *Comp. J.*, 21:243–245, 1978.

- [120] M. Stugaard. Intraventricular filling pattern and diastolic function. Clinical and experimental studies by Color M-mode Doppler echocardiography. Phd thesis, University of Oslo, 1995.
- [121] M. Stugaard, U. Brodahl, H. Torp, and H. Ihlen. Abnormalities of left ventricular filling in patients with coronary artery disease : Assessment by colour M-mode Doppler technique. *European Heart Journal*, 15:318–327, 1994.
- [122] M. Stugaard, C. Risøe, I. Halfdan, and O.A. Smiseth. Intracavitary filling pattern in the failing left ventricle assessed by color m-mode doppler echocardiography. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 24(3):663–70, 1994.
- [123] M. Stugaard, O.A. Smiseth, C. Risøe, and I. Halfdan. Intraventricular early diastolic filling during acute myocardial ischemia, Assessment by multigated color M-mode Doppler echocardiography. *Circulation*, 88:2705–2713, 1993.
- [124] H. Takatsuji, T. Mikami, K. Urasawa, J.-I. Teranishi, H. Onozuka, C. Takagi, Y. Makita, H. Matsuo, H. Kusuoka, and A. Kitabatake. A new approach for evaluation of left ventricular diastolic function : Spatial and temporal analysis of ventricular filling flow propagation by color m-mode doppler echocardiography. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 27(2):365–71, 1996.
- [125] M. Tanemura, T. Ogawa, and N. Ogita. A new algorithm for three-dimensional Voronoi tessellation. *J. Comp. Phys.*, 51:191–207, 1983.
- [126] T. Taylor, H. Okino, and T. Yamaguchi. Three-dimensional analysis of left ventricular ejection using computational fluid dynamics. *J. Biomech. Eng.*, 116:127–130, 1994.
- [127] T. Taylor and T. Yamaguchi. Realistic three-dimensional left ventricular ejection determined from computational fluid dynamics. *Med. Engineering & Physics*, 17:602–608, 1995.
- [128] T.W. Taylor and T. Yamaguchi. Three dimensional simulation of blood flow in an abdominal aortic aneurysm - steady and unsteady computational methods. *J. Biomech. Eng.*, 116:229–240, 1994.
- [129] J.D. Thomas, C.Y.P. Choong, F.A. Flachskampf, and A.E. Weyman. Analysis of the early transmitral Doppler velocity curve : Effect of primary physiologic changes and compensatory preload adjustment. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 16:644–655, 1990.
- [130] J.D. Thomas, J.B. Newell, C.Y.P. Choong, and A.E. Weyman. Physical and physiological determinants of transmitral velocity : numerical analysis. *Am. J. Physiol.*, 260:H1718–H1730, 1991. (*Heart Circ. Physiol.* 29).
- [131] J. Y. Trépanier, M. Reggio, M. Paraschivoiu, and R. Camarero. Unsteady Euler solutions for arbitrarily moving bodies and boundaries. *AIAA*, 31(10):1869–1876, 1993.

- [132] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J. Comp. Phys.*, 72(2):277–298, 1987.
- [133] E. Turkel. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. Technical Report 92-47, ICASE, 1992.
- [134] E. Turkel, A. Fiterman, and B. van Leer. Preconditioning and the limit to the incompressible flow equations. Technical Report 93-42, ICASE, 1993.
- [135] F. Van de Werf, J. Minten, P. Carmeliet, H. De Geest, and H. Kesteloot. The genesis of the third and fourth heart sounds : A pressure-flow study in dogs. *J. Clin. Invest.*, 73:1400–1406, 1984.
- [136] V. Venkatakrishnan. Perspective on unstructured grid flow solvers. *AIAA*, 34(3):533–547, March 1996.
- [137] P. Verdonck. Studie van de bloedstroom doorheen de mitraalklep. Proefschrift doctoraat, Universiteit Gent, 1992.
- [138] R. Verhoeven. Niet permanente stroming in cirkelvormige leidingen : Een critische analyse van de waterslagberekening in theorie en praktijk. Proefschrift doctoraat, Universiteit Gent, 1982.
- [139] C. Vesier, R. Levine, and A. Yoganathan. Simulation of the blood flow in the left ventricle : the effect of papillary muscle geometry on mitral valve function. *Computer Simulations in Biomedicine, Computational Mechanics Publications*, pages 146–156, 1995.
- [140] C.C. Vesier and A.P. Yoganathan. A computer method for simulation of cardiovascular flow fields : Validation of approach. *J. Comp. Phys.*, 99:271–287, 1992.
- [141] J. Vierendeels. Studie van diastolische drukgradiënten in de linkerventrikel met een vloeistof-wand interactie model. Afstudeerwerk gediplomeerde in de gespecialiseerde studies van biomedische en klinische ingenieurstechnieken, Rijksuniversiteit Gent, Fakulteit Geneeskunde, 1996.
- [142] J. Vierendeels and K. Rienslagh. Simulation of flow through complex shaped moving domains. In *Proc. of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Paris, September 1996, Computational Fluid Dynamics '96*, pages 499–504, Chichester, 1996. John Wiley. ISBN 0-471-95851-4.
- [143] J. Vierendeels, K. Rienslagh, and E. Dick. Flow calculation in complex shaped moving domains. In *Proc. 13th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Snowmass, CO*, pages 1004–1014. AIAA press, Washington, June 1997. AIAA-97-2044. ISBN 1-56347-233-3.

- [144] J. Vierendeels, K. Riemsdagh, and E. Dick. A multigrid semi-implicit line-method for viscous incompressible and low mach number compressible flows. In *Proc. of the Fourth ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Athens, September 1998, Computational Fluid Dynamics '98*, Chichester, 1998. John Wiley.
- [145] J. Vierendeels, P. Verdonck, and E. Dick. Assessment of intraventricular pressure gradients during diastole with a 1D moving fluid-structure interaction model. In *Proc. of the 1997 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vancouver*. ASME, June 1997. paper FEDSM97-3428.
- [146] J. Vierendeels, P. Verdonck, and E. Dick. Intraventricular Pressure Gradients and the Role of Pressure Wave Propagation. *Journal of Cardiovascular Diagnosis and Procedures*, 14(3):147–152, 1997.
- [147] D. F. Watson. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *Comp. J.*, 24:167–172, 1981.
- [148] N. P. Weatherill and O. Hassan. Efficient three-dimensional grid generation using the Delaunay triangulation. In *Proc. of the First European Computational Fluid Dynamics Conference, Brussels*, pages 961–968, 1992.
- [149] N. P. Weatherill and B. K. Soni. Grid adaption and refinement in structured and unstructured algorithms. In *Proc. of the third International Conference on Numerical Grid Generation in CFD and related Fields, Barcelona*, pages 143–157, 1991.
- [150] J. Weiss and W. Smith. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA*, 33(11):2050–2057, 1995.
- [151] A.E. Weyman. *Principles and practice of Echocardiography*. Lea & Febiger, second edition, 1994. ISBN 0-8121-1207-5.
- [152] E.L. Yellin and Nikolic S.D. Diastolic suction and the dynamics of left ventricular filling. In W.H. Gaasch and M.M. LeWinter, editors, *Left ventricular diastolic dysfunction and heart failure*, pages 89–102. Lea & Febiger, 1994.
- [153] F.C.P. Yin. Ventricular wall stress. *Circ. Res.*, 49:829–842, 1981.
- [154] F.C.P. Yin, R.K. Strumpf, P.H. Chew, and S.L. Zeger. Quantification of the mechanical properties of noncontracting canine myocardium under simultaneous biaxial loading. *J. Biomech.*, 20(6):577–589, 1987.